RENDEZ-VOUS

COMMENT DÉFINIR UN PAVAGE EN SPIRALE ?

Identifiables au premier coup d'œil, ces structures étonnantes et magnifiques défient pourtant les mathématiciens, qui peinent à en donner la définition.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

On pense souvent que l'unique activité du mathématicien est la démonstration : il ne travaillerait qu'à trouver des preuves et à les rédiger avec rigueur pour convaincre ses collègues. La réalité est autre : bien des aspects de l'activité mathématique sont aussi importants que la recherche de démonstrations. Nous allons en examiner une série, et la suite de l'article donnera des détails sur un cas récent où le défi était simplement de trouver une bonne définition des pavages en spirale.

LA DÉMONSTRATION N'EST PAS TOUT

Faire progresser les mathématiques consiste parfois à concevoir des notations nouvelles. Euclide ne connaissait pas le signe de l'égalité =, ni la notation des puissances avec des exposants (par exemple 2^3 pour désigner huit), ni le système de numération décimale si efficace pour traiter les questions d'arithmétique.

Les mathématiciens créent aussi des objets nouveaux comme les espaces à plus de trois dimensions, les matrices, les graphes, etc. En particulier, l'introduction de nombres nouveaux, par exemple les nombres complexes ou les nombres surréels, est un travail où la créativité du mathématicien importe plus que sa capacité à démontrer des propriétés difficiles.

Une autre activité importante depuis que l'on sait que les systèmes d'axiomes utilisés en mathématiques pour les entiers et pour les ensembles sont toujours impuissants à en saisir totalement la vérité est de trouver de nouveaux axiomes.

La modélisation est aussi une activité mathématique non démonstrative. Elle ressemble à la constitution de nouvelles théories, mais elle en diffère puisqu'on cherche des objets et structures dont on veut qu'ils simulent le monde réel.

Les développements de l'informatique ont créé de nombreuses activités mathématiques nouvelles qui ne se réduisent pas à la recherche de démonstrations. La programmation d'une fonction mathématique est un travail de ce type et le programme ne servira que si l'on s'est préoccupé de son efficacité, ce qui est aussi un travail mathématique.

Bien sûr, ces activités s'accompagnent assez souvent de la recherche de démonstrations. Par exemple, avant de proposer un nouvel axiome, il faut s'assurer qu'il ne se déduit pas des autres. Avant d'adopter une nouvelle théorie, il faut la développer, donc démontrer des théorèmes qui établissent, d'une part, qu'on peut en faire quelque chose, d'autre part, qui persuadent qu'on ne tombe pas rapidement sur une contradiction qui la rend inutile. Ces preuves sont cependant souvent assez faciles, l'important est ailleurs.

Il est étonnant et remarquable que la mise au point des algorithmes d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, et d'extraction de racines carrées qu'on apprend à l'école s'est faite en Inde vers le VIe siècle de

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

notre ère sans que l'on démontre que les algorithmes proposés produisent toujours des résultats exacts. Ceux qui ont inventé ces méthodes (et ont fait faire un formidable progrès aux mathématiques) les ont probablement vérifiées sur quelques exemples. Et ils n'ont pas jugé utile de mener les raisonnements parfois assez compliqués qui prouvent que ces algorithmes sont corrects. Raisonnements qui d'ailleurs ne sont jamais enseignés, même aujourd'hui.

LES PAVAGES EN SPIRALE

Nous allons illustrer l'idée que l'activité mathématique ne se réduit pas à la recherche de preuves avec un exemple étonnant et récent. Il nous semble évident que nous savons reconnaître qu'un pavage du plan est en spirale ou ne l'est pas. Par exemple, l'encadré 1 montre un pavage en haut à gauche qui n'est pas en spirale, alors que celui en haut à droite l'est. Pourtant, le premier pavage peut être vu comme composé de pavés disposés en spirale, et cela de deux façons différentes au moins, comme nous le voyons sur les dessins du bas de l'encadré 1.

Nous comprenons avec cet exemple que la définition d'un pavage en spirale ne peut être facile et, jusqu'à tout récemment, aucune définition satisfaisante n'avait été proposée. La difficulté pour fournir une telle définition est mentionnée par Branko Grünbaum et Geoffrey Shephard, les auteurs de la « bible » des pavages mathématiques (*voir la bibliographie*), comme étant un problème ouvert.

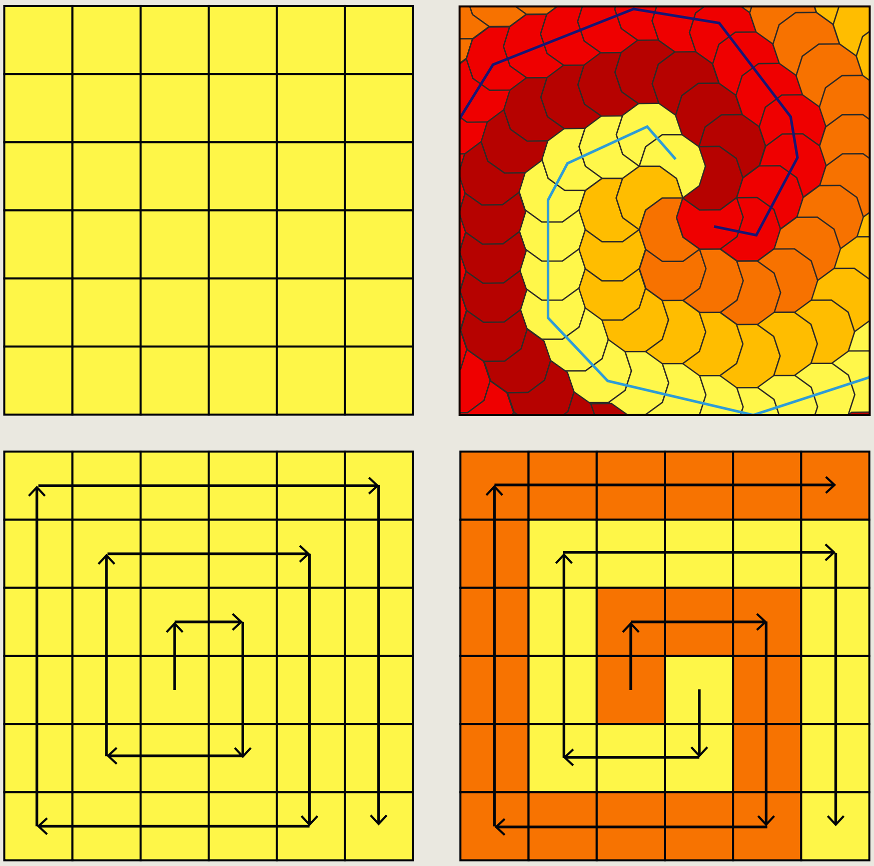
On a parfois envisagé l'idée que le problème était un faux problème, car l'effet qu'un pavage est en spirale pourrait être un « effet psychologique ». En 2017, Bernhard Klaassen a cependant proposé une définition mathématique de la notion. Cette définition a été mise à l'épreuve en 2022 lors de la réalisation d'un programme informatique qui détermine si un pavage est en spirale ou non.

PAVÉS ET PAVAGES DU PLAN

La définition proposée par Bernhard Klaassen fait appel à des éléments compliqués de géométrie. Nous les présenterons en langage courant en renvoyant aux articles du

1 PAVAGES EN SPIRALE

Définir la notion de « pavage en spirale » est plus délicat qu'on l'imagine avant d'y avoir réfléchi. Le problème était considéré comme un problème ouvert. Les quatre dessins font comprendre la difficulté.
En haut, il est clair pour tout le monde que le dessin de gauche n'est pas en spirale, alors que celui de droite (même s'il était dessiné sans utiliser de couleur) l'est. Pourtant, il est facile d'imaginer de parcourir en spirale les pavés du dessin de gauche, ce qui d'ailleurs peut s'envisager de deux façons différentes, au moins, que représentent les dessins du bas.



mathématicien pour des formulations mathématiques techniques et précises.

La définition de pavage présente déjà quelques difficultés. Considérons d'abord la notion de « pavé » (ou « tuile »). Ce n'est pas aisé car les sous-ensembles du plan peuvent être très découpés, voire disloqués et donc un grand nombre de sous-ensembles du plan ne sont pas envisageables comme pavés. La définition la plus simple est qu'un pavé P est un sous-ensemble du plan obtenu en déformant continûment un disque plein du plan: si on peut étirer un disque en caoutchouc parfaitement élastique sans le déchirer ni le replier sur lui-même pour lui donner la forme de P, c'est que P est un pavé. La définition interdit que P comporte plusieurs composantes disjointes ou qu'il ait des trous (*voir l'encadré 2A*). Avec cette définition, la frontière d'un pavé P (son bord) fait partie de P.

Jusqu'à tout récemment, aucune définition satisfaisante n'avait été trouvée

La seconde étape consiste à définir ce qu'on dénommera un « pavage du plan ». L'idée est simple: un pavage est une façon de couvrir entièrement le plan par des pavés, sans qu'il y ait de recouvrements entre pavés.

La difficulté vient du mot « recouvrement ». On ne peut pas dire seulement que deux pavés différents d'un pavage du plan doivent avoir une intersection vide (n'avoir aucun point en commun), car dans le cas, par exemple, du pavage le plus simple du plan par des carrés formant un damier infini, deux carrés côte à côte ont un même segment de droite en commun: leur intersection n'est pas vide!

Une façon de s'en sortir, que nous adopterons, consiste à dire: dans un pavage du plan par des pavés $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ tout point du plan doit être couvert par un pavé au moins, et l'intersection de deux pavés distincts ne doit jamais contenir un disque de rayon non nul.

On a maintenant une définition satisfaisante de la notion de pavage du plan. Pour aborder la question de la définition des « pavages en spirale », nous allons ne considérer que les pavages n'utilisant qu'un nombre fini *k* de formes différentes, par exemple des carrés, ou des octogones et des carrés, dénommés « pavages *k*-hédraux ». Considérer des pavages utilisant des pavés d'une infinité de formes différentes compliquerait le problème qui sera déjà assez délicat avec la catégorie des pavages *k*-hédraux.

QUELQUES EXEMPLES

Donnons quelques exemples de pavages en spirale dont la découverte a étonné le monde mathématique.

Le pavage de Heinz Voderberg (1911-1945) a été proposé en 1936 (*voir l'encadré 3*). Il n'utilise qu'une seule sorte de pavé, un ennéagone, un polygone à 9 côtés. On peut l'utiliser pour faire un pavage du plan périodique, mais surtout il permet le premier pavage en spirale du plan ne résultant pas d'un artifice comme les pavages carrés du bas de l'encadré 1.

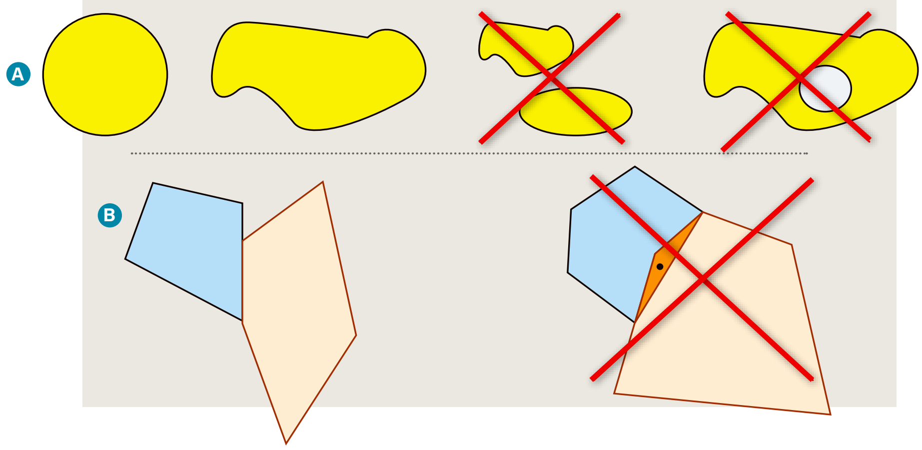
Un autre pavé assez simple permet aussi plusieurs pavages en spirale différents. On l'obtient en partant d'un polygone régulier à 10 côtés, puis en effectuant une indentation (*voir l'encadré 3*). En empilant des copies de ce pavé, on obtient une bande dont une infinité d'exemplaires collés côte à côte rempliront parfaitement et périodiquement le plan. Plus intéressant est qu'il pave le plan de manière spiralée de plusieurs façons.

SAUTONS LES ÉVIDENCES!

Une question doit être posée: puisque pour un mathématicien un dessin ne prouve rien, qu'est-ce qui assure qu'il n'y a pas de chevauchements et pas de parties du plan non couvertes dans ces dessins… qui pourraient être plus ou

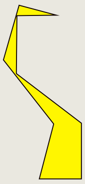
2 PAVÉS ET PAVAGES

En mathématiques, on choisit le plus souvent d'interdire qu'un pavé possède plusieurs parties séparées ou qu'il possède des trous : un pavé doit être ce qu'on peut obtenir en déformant un disque supposé en caoutchouc parfaitement élastique *(A)*. On choisit aussi de préciser que le bord d'un pavé lui appartient. Une difficulté se présente alors : on ne peut pas interdire à deux pavés d'un pavage du plan d'avoir une partie commune. La solution consiste à exiger que quand l'intersection de deux pavés n'est pas vide, elle ne permette pas d'y glisser un disque de rayon non nul *(B)*.

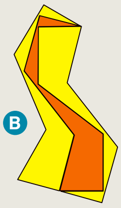


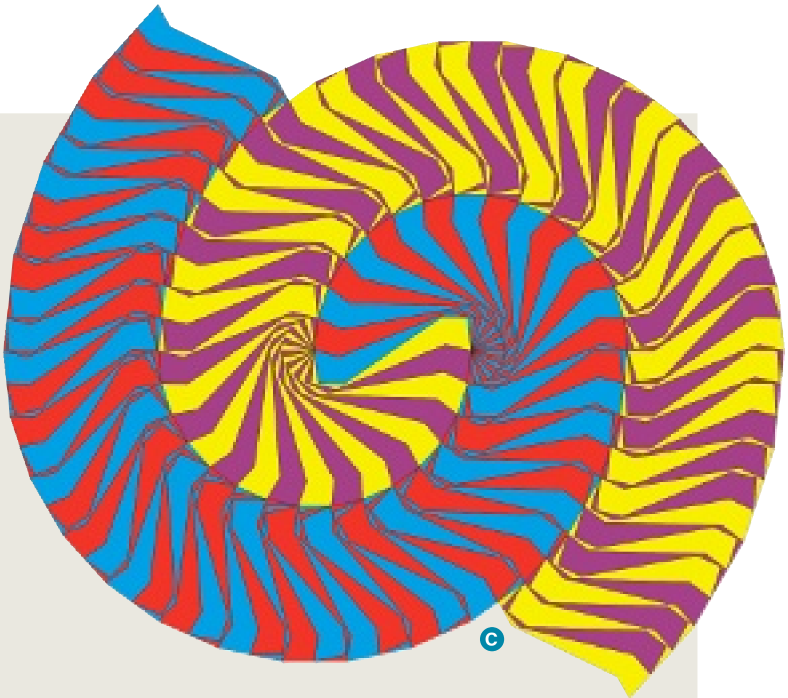
3 DEUX PAVÉS DONNANT DES PAVAGES EN SPIRALE

A



B

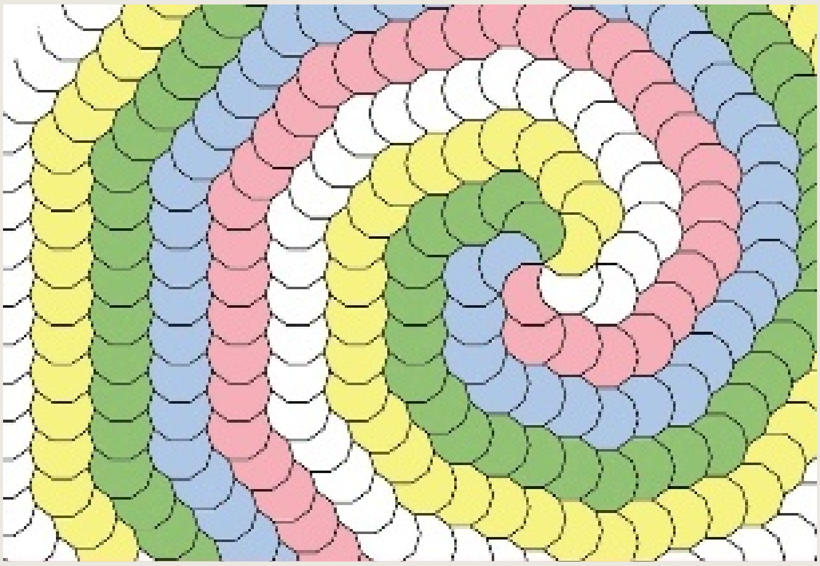




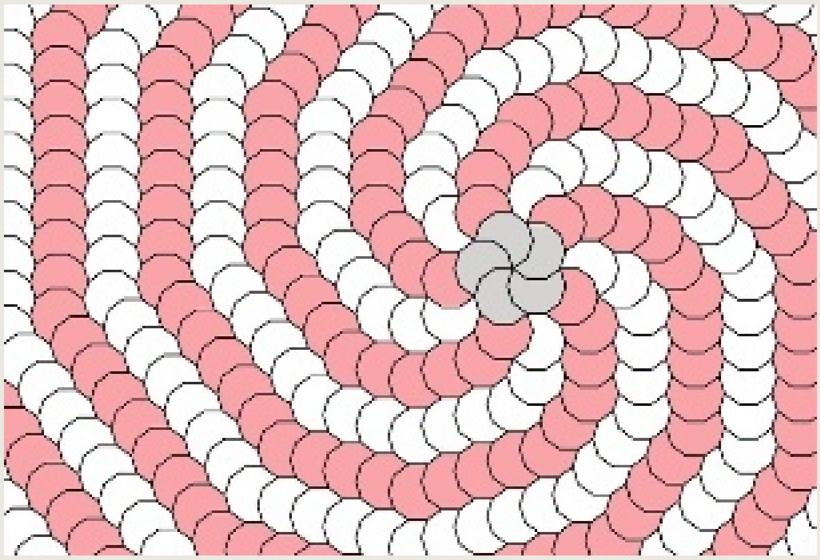
C

Le pavage de Voderberg est un pavage monoédrique, c'est-à-dire qu'une seule figure est utilisée afin de remplir le plan. Celui-ci est constitué d'ennéagones *(A)*, irréguliers et concaves, qui pavent le plan de manière périodique mais aussi en spirale.
La caractéristique particulière de ce polygone est qu'il peut être entouré exactement par deux copies de lui-même *(B)*.
En 1936, Heinz Voderberg, mathématicien allemand ayant étudié à Greifswald en Poméranie, découvre la solution au problème posé par son professeur Karl Reinhardt : « Trouvez deux polygones congruents entourant un point de manière qu'un ou deux polygones congrus aux précédents s'emboîtent parfaitement à l'intérieur de l'espace créé. »
Parce qu'il n'a pas de symétrie par translation, le pavage de Voderberg *(C)* est apériodique, même s'il présente un motif répétitif évident.
Ce pavage a été le premier en spirale à être conçu, précédant les travaux de Branko Grünbaum et Geoffrey Shepard dans les années 1970.
Un autre pavé permettant le pavage du plan en spirale s'obtient à partir d'un décagone régulier sur lequel on a effectué une indentation de la surface formée par trois côtés comme représenté sur la figure *(D)*.
Cette forme permet le pavage périodique du plan et des pavages en spirale du plan avec 5 bras *(E)* et 10 bras *(F)*.

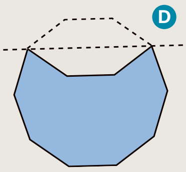
E



F



D



moins approximatifs ou truqués, comme c'est le cas pour les découpages paradoxaux (dans lesquels une réorganisation des éléments donne l'impression que l'aire augmente ou diminue)?

La correction d'un pavage peut se démontrer et nous allons expliquer comment. Pourtant, il faut noter que dans les publications mathématiques sur ces sujets, ce type de démonstrations n'est presque jamais donné, car les mathématiciens les jugent trop faciles ou ennuyeuses: on est dans un domaine mathématique où les démonstrations ont moins d'importance que le travail d'imagination et de construction!

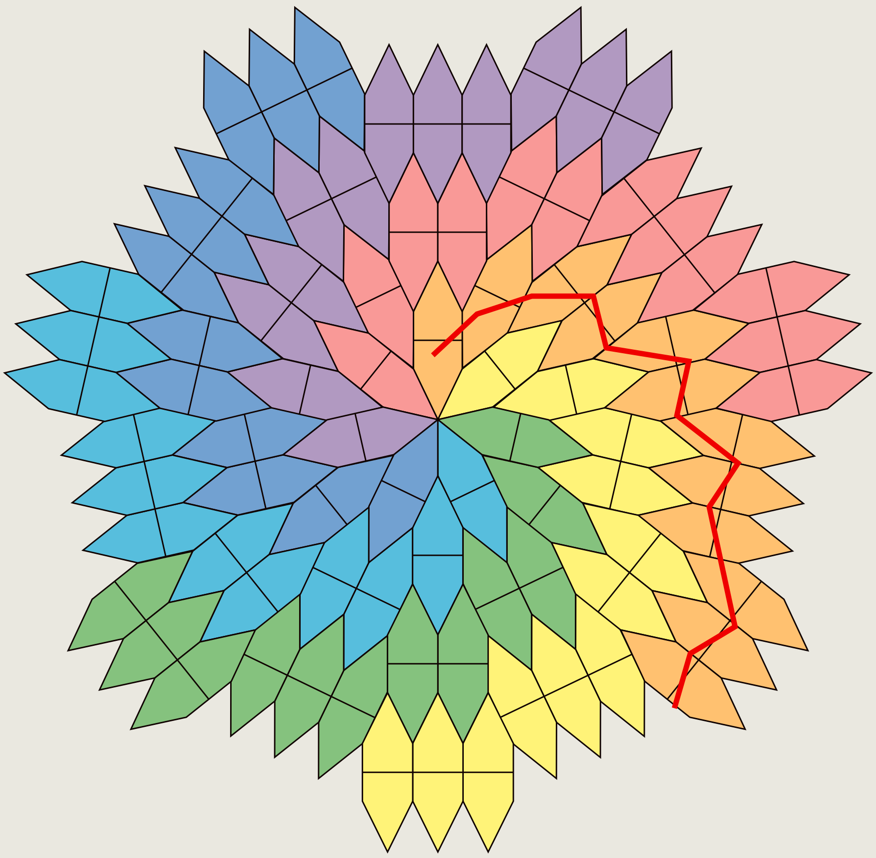
Le principe des démonstrations de correction des pavages dessinés (qu'on pourrait écrire mais qu'on n'écrit pas!) consiste à regarder le dessin du pavage en contrôlant chaque contact entre pavés. La géométrie des pavés utilisés est connue et, par exemple, la construction du pavé à partir du décagone régulier des pavages de l'encadré 3 permet d'en connaître les longueurs des côtés et les angles: tous les côtés ont la même longueur et les angles entre côtés se déduisent de ceux du décagone régulier qui a servi au départ. Pour chaque contact entre pavés, ces informations sur les pavés permettent de contrôler, donc de prouver, qu'il n'y a ni recouvrements interdits ni espaces du plan non couverts. Si le pavage est apériodique et qu'il comporte une infinité de pavés, on ne peut pas se contenter de vérifier que les contacts entre pavés sont bons pour un nombre fini d'entre eux. Il faut aussi justifier pourquoi les contacts entre pavés entrent tous dans un nombre fini de catégories qui suffisent pour traiter le plan infini dans sa totalité. Pour un œil mathématique attentif, tout cela est évident ou facile, mais c'est tellement pénible et long à détailler que presque jamais personne ne prend la peine de rédiger la démonstration que les pavages soigneusement dessinés sont corrects.

DÉFINITIONS TORDUES!

La définition attendue procède en plusieurs étapes. Soit un pavage k-hédral, nous dirons que c'est un L-pavage si on peut regrouper les pavés en plusieurs sous-ensembles disjoints dénommés « bras », et si pour chaque bras nous pouvons tracer une courbe continue et illimitée dénommée « filetage » passant une fois par chaque pavé du bras et s'enroulant infiniment autour d'un point central. L'encadré 1 montre les bras du pavage de droite (coloriés différemment) et deux de leurs filetages.

4 LA DÉFINITION DE KLAASSEN: BRAS ET FILETAGE

La définition d'un pavage en spirale s'appuie sur la séparation des pavés en sous-ensembles, chacun constituant un « bras » du pavage. Chaque bras est parcouru par un « filetage » (une courbe ne se coupant pas elle-même qui tourne infiniment en s'éloignant du centre). Pour exclure les faux pavages en spirale, il faut ajouter la condition que si deux pavés d'un même bras sont côte à côte, on ne doit pas retrouver la même disposition de deux pavés entre deux pavés appartenant à deux bras différents *(voir plus de précision dans le texte)*.



Cette définition n'est qu'un premier pas, car le pavage en haut à gauche de l'encadré 1 peut effectivement être séparé en deux bras avec chacun un filetage, comme c'est demandé par la définition (*dessin en bas à droite*). Pour mettre ces faux pavages en spirale à l'écart, il faut compléter la définition de L-pavage.

Un S-pavage est un L-pavage vérifiant la propriété supplémentaire que deux pavés voisins dans un bras sont placés l'un par rapport à l'autre d'une manière qui ne peut pas se produire avec deux pavés voisins pris dans deux bras différents, sauf éventuellement au début d'un bras. Deux pavés sont voisins dans un bras si leur intersection est coupée par le filetage du bras ou comporte un nombre infini de points (par exemple un segment de droite). Deux pavés P, P' sont placés de la même façon que deux autres Q, Q', si une translation suivie d'une rotation permet de faire coïncider P+P' avec Q+Q'.

La définition est maintenant complète: un pavage est en spirale s'il existe une façon de déterminer les bras et de proposer un filetage pour chacun d'eux et que cela donne bien un S-pavage. L'encadré 1 en haut à droite et l'encadré 4 proposent des exemples en précisant les bras et filetages de quelques pavages en spirale.

Une inspection du pavage de droite de l'encadré 1 (où on n'a dessiné que deux des cinq filetages) montre qu'à l'intérieur de chaque bras (déterminés par le coloriage des pavés), il n'y a que des positionnements de pavés voisins qui ne se produisent pas entre deux pavés provenant de deux bras différents. En effet, quand les deux pavés voisins sont dans le même bras, le « creux » de l'un chevauche l'autre, alors que quand deux pavés sont côte à côte dans deux bras différents aucun ne chevauche l'autre (sauf au centre comme la définition l'autorise). Il s'agit donc d'un S-pavage, et donc le pavage est, au sens mathématique, un pavage en spirale.

Le pavage de gauche de l'encadré 1, lui, n'est pas un S-pavage, car les pavés voisins dans un même bras du dessin en bas à droite sont dans une position relative qui est aussi utilisée entre deux pavés de deux bras différents.

L'examen d'autres pavages montre donc qu'effectivement les pavages artificiellement mis en spirale (*comme par les dessins 3 et 4 de l'encadré 1*) ne vérifient pas la définition de S-pavage, alors que ceux (*par exemple de l'encadré 3*) que notre œil considère vraiment comme en spirale satisfont la définition. On pourra donc considérer que la définition de S-pavages pour les pavages *k*-hédraux est une définition satisfaisante des pavages en spirale.

En réalité, elle ne fonctionne que lorsqu'il y a au moins deux bras différents et il faut prévoir un complément à la définition pour traiter le cas d'une spirale possédant un seul bras qui s'enroule sur lui-même. Nous ne donnons pas les détails de ce complément que vous pouvez chercher à imaginer vous-même, ou que vous irez voir en lisant les articles de Bernhard Klaassen.

Il est impossible de prouver qu'une définition est satisfaisante

DÉFINIR, UN PRÉALABLE POUR LES PROGRAMMES

Cette recherche de la bonne définition n'est pas un simple jeu pour mathématicien, c'est un travail préalable à l'écriture d'un programme, travail qui indiquera, conformément à ce que notre œil voit, quels sont les pavages qu'il faut considérer en spirale.

L'intelligence artificielle est souvent confrontée à ce type de difficultés: il faut produire un algorithme qui triera, comme notre intelligence le fait, diverses catégories d'objets. L'approche par réseau de neurones donnera quelque chose, mais, même si elle conduit à certains résultats, elle sera susceptible d'erreur car c'est souvent le cas avec ces réseaux (*voir l'article de cette rubrique sur les images pièges de juin 2018, Pour la Science n° 488*), alors que si on passe par des analyses mathématiques aucune incertitude ne sera possible.

Lorsque des désaccords entre la réponse donnée par un humain et celle donnée par l'algorithme se produiront, ce qui n'est peut-être pas exclu, il sera raisonnable le plus souvent de considérer que c'est la réponse de l'algorithme qui doit être préférée (comme quand un désaccord se produit entre le calcul numérique que fait un humain et celui que fait une machine), ou alors qu'il faut affiner encore la définition mathématique. De tels ajustements doivent être envisagés car, bien sûr, il est impossible de prouver qu'une définition est satisfaisante. Ce que notre jugement considère comme un pavage en spirale n'est pas une chose précise et peut varier d'un individu à l'autre, on ne pourra donc jamais démontrer qu'une définition atteint définitivement son but; on ne peut que le vérifier en multipliant les exemples. Le contrôle qu'une définition mathématique est satisfaisante est encore une activité mathématique qui ne consiste pas en une démonstration! ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Klaassen, **Is the spiral effect psychological ?**, à paraître dans *Elemente der Mathematik*, 2022.

B. Klaassen, **Forcing nonperiodic tilings with one tile using a seed,** *European Journal of Combinatorics*, 2022.

C. Qiu, *et al.*, **Visualization of Escher-like spiral patterns in hyperbolic space,** *Symmetry*, 2022.

J. C. Duero *et al.*, **Spirals in periodic tilings,** *Contributions to Discrete Mathematics*, 2022.

J. Adams *et al.*, **Your friendly neighborhood Voderberg tile,** *Mathematics Magazine*, 2020.

B. Klaassen, **How to define a spiral tiling ?**, *Mathematics Magazine*, 2017.

A. Nicolas, **Parcelles d'infini, promenade au jardin d'Escher,** Belin-Pour la Science, 2006.

B. Grünbaum et G. C. Shephard, **Tilings and Patterns,** W.H. Freeman, 1987.