RENDEZ-VOUS

FLORILÈGE DE RECORDS EN SCIENCE

Pour s'amuser, provoquer, affirmer leur suprématie ou rendre une démonstration plus abordable, certains chercheurs battent des records.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

En sciences, on recherche l'exactitude et l'utilité des connaissances élaborées, la justesse des démonstrations mathématiques, la précision des modèles, etc. Il n'est donc pas dans la logique des sciences de tenter de battre des records, qu'il faut laisser aux sportifs et au livre *Guinness*. Pourtant nous allons, pour le plaisir et l'amusement qu'ils procurent, nous intéresser à eux et aux questions et paradoxes qui les accompagnent.

ARTICLES COURTS

Un article scientifique apporte de l'information, et donc s'il en apporte peu, il a peu d'intérêt et ne doit pas pouvoir être publié. Ce n'est pas si simple, comme le démontrent les articles scientifiques les plus courts.

Commençons par un exemple venu non pas des revues scientifiques, mais de la presse généraliste, car il est éloquent. Les journaux d'informations générales publient parfois des articles de quelques lignes, toutefois, si on ne prend pas en compte le titre et qu'on ne retient que le corps d'un article, celui publié par Daniel Victor dans le *New York Times* le 2 septembre 2016 constitue un exploit difficile à battre. Le titre était « When I'm mistakenly put on an email chain, should I hit "reply all" asking to be removed ? » (« Quand je me retrouve par erreur sur une liste de courriels, dois-je choisir l'option "répondre à tous" pour demander à être retiré ? »). Le corps de l'article sous le titre ne comportait que deux lettres : « no ».

En fait, l'article proposé initialement par l'auteur était un peu plus long, mais la responsable de la rubrique, comme c'est souvent le cas, l'a modifié et l'a raccourci pour aboutir à l'implacable concision du *no*.

Plus scientifique, mentionnons l'article mathématique publié en 1966 dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* par Leon Lander et Thomas Parkin, tous les deux ingénieurs informaticiens de la compagnie californienne Aerospace Corporation. Le titre de l'article était « Counterexample to Euler's conjecture of sums of like powers » (« Contre-exemple à la conjecture d'Euler sur les sommes de nombres élevés à une même puissance »). Il comportait cinq lignes plus une référence. Il est reproduit en totalité dans l'encadré 1.

L'article indique une somme de quatre puissances cinquièmes qui est elle-même une puissance cinquième, ce qui infirme la conjecture énoncée par Leonhard Euler deux cents ans plus tôt. La conjecture était : « Si une somme de n puissances k-ièmes est elle-même une puissance k-ième alors $n \geq k$ ».

La découverte du contre-exemple a exigé l'utilisation d'une machine très puissante pour l'époque, le CDC 6600 de la firme Control Data Corporation qui était une grande entreprise informatique. Le CDC 6600 fut la machine la plus puissante au monde de 1964 à 1969, sa puissance de calcul considérée comme colossale en 1966 est aujourd'hui 200 fois plus faible que celle d'une console de jeu Nintendo DS !

La conjecture d'Euler était une généralisation de la conjecture de Fermat, devenue le théorème d'Andrew Wiles en 1994, qui affirme que la somme de deux puissances k-ièmes d'entiers positifs ne sont jamais une puissance k-ième quand k dépasse 2. Le court article de Lander et Parkin est important, mais il laissait indéterminée l'existence d'une somme de trois puissances quatrièmes égale à une puissance quatrième. La question fut tranchée en 1988 par un contre-exemple de Noam Elkies : $2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$, résultat amélioré la même année par Roger Frye : $95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4$. Pour $k = 3$, le problème est un cas particulier du théorème de Wiles : il n'existe pas de triplets d'entiers positifs n, m, p tels que $n^3 + m^3 = p^3$. On ne connaît aujourd'hui aucun contre-exemple pour un exposant k supérieur à 5. Parmi les articles très courts présentant un contre-exemple, mentionnons celui de Doron Zeilberger : « *On a conjecture of R. J. Simpson about exact covering congruences* ». L'article de Zeilberger, lui aussi, établit la fausseté d'une conjecture – un peu compliquée à énoncer, en l'occurrence – et fait donc avancer réellement un sujet mathématique.

Dans les deux articles courts évoqués il s'agit à chaque fois d'un contre-exemple, car il est souvent plus rapide de proposer un contre-exemple montrant la fausseté d'une conjecture mathématique que d'en proposer une démonstration. Il faut cependant remarquer que de tels articles ne prouvent pas vraiment ce qu'ils affirment, car pour être certain de la justesse du contre-exemple, il faut contrôler les données proposées, ce que leur simple lecture ne permet pas. Pour l'article de Lander et Parkin, il faut ainsi faire le calcul à la main, ce qui est long et risqué (comment être certain de ne pas se tromper dans la série d'opérations à effectuer ?) ou recourir à un ordinateur auquel on doit faire confiance. Il en va de même pour l'article de Zeilberger. Ces articles très courts sont, paradoxalement, des articles plus longs et difficiles à valider que la plupart des articles mathématiques contenant des démonstrations qu'un lecteur compétent peut vérifier en même temps qu'il le lit.

Pour le plaisir du jeu ou de la provocation, des articles scientifiques bien plus courts ont été publiés. Le plus court bat même celui du *New York Times* mentionné plus haut. Définitivement imbattable, il n'est cependant qu'une provocation humoristique due au psychologue américain Dennis Upper. Son titre (traduit en français) est « L'autotraitement infructueux d'un syndrome de la page blanche ». Le corps de l'article est vide ! D'autres exemples d'articles courts existent aussi en physique, en géologie, etc. Vous en trouverez une liste en ligne (https://paperpile.com/blog/shortest-papers) mais aucun n'égale en intérêt celui de Lander et

1 ARTICLES COURTS : LES RECORDS

En mathématiques, certains articles couvrent plusieurs centaines de pages, d'autres ne font que quelques lignes. Mais ces articles très courts sont parfois très importants. Le premier exemple *(en haut)* est paru dans une revue mathématique très sérieuse et infirme une conjecture restée ouverte pendant deux siècles. Le second *(en bas)*, comme le précédent, décrit un contre-exemple résultant d'un long calcul qu'il faut vérifier pour être sûr que l'article est correct. Mais aucune publication ne surpassera une plaisanterie autoréférente que son auteur a réussi à faire publier dans une revue scientifique de psychologie. Il évoque la crainte paralysante de l'écrivain devant une feuille blanche… et son texte est évidemment… vide !

COUNTEREXAMPLE TO EULER'S CONJECTURE ON SUMS OF LIKE POWERS

BY L. J. LANDER AND T. R. PARKIN

Communicated by J. D. Swift, June 27, 1966

A direct search on the CDC 6600 yielded

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

as the smallest instance in which four fifth powers sum to a fifth power. This is a counterexample to a conjecture by Euler [1] that at least n nth powers are required to sum to an nth power, $n > 2$.

REFERENCE

1. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. 2, Chelsea, New York, 1952, p. 648.

On a Conjecture of R. J. Simpson About Exact Covering Congruences

Doron Zeilberger[1]

Department of Mathematics, Drexel University, Philadelphia, PA 19104

The following is a counterexample[2] to Simpson's conjecture [2]: $D = \{6, 15, 35, 14, 210$ (140 times)$\}$. It was concocted using the elegant and powerful approach of [1].

REFERENCES

1. Marc A. Berger, Alexander Felzenbaum, and Aviezri S. Fraenkel, *New results for covering systems of residue sets*, *Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc.*, 14 (1986) 121–125.
2. R. J. Simpson, *Disjoint covering systems of congruences*, this MONTHLY, 94 (1987) 865–868.

[1] Supported in part by NSF grant DMS 8800663.
[2] Another counterexample was found later, and independently, by John Beebee.

Parkin, qui était court mais résolvait un problème difficile resté irrésolu durant deux siècles.

TITRES ET NOMBRE D'AUTEURS

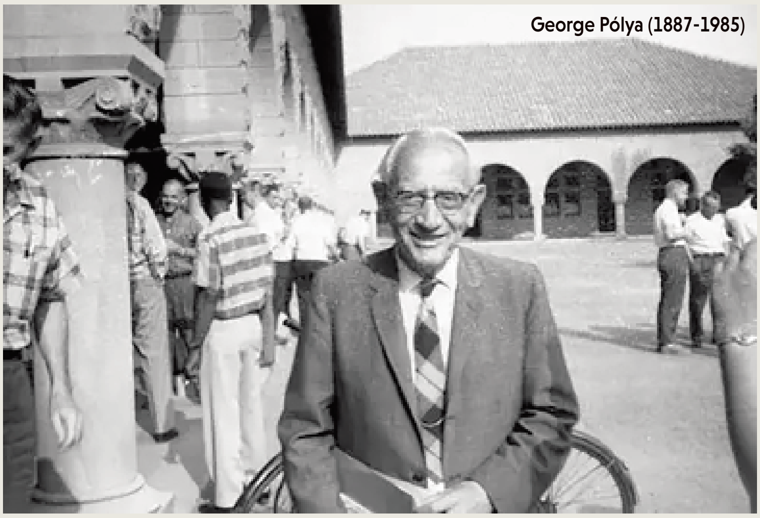
L'article scientifique ayant le titre le plus long, jusqu'à preuve du contraire, comporte 673 caractères (environ 15 lignes d'une colonne d'un article de *Pour la Science*) et commence par: «ACC/AHA 2007 Guidelines for the management of patients with unstable angina/Non–ST-elevation myocardial infarction…». Il a été publié en 2007 dans le *Journal of the American College of Cardiology*. Il a été cité plus de 4600 fois, ce qui est remarquable.

2 LES CONJECTURES

Les conjectures jouent un rôle important en mathématiques. Si l'énoncé mathématique conjecturé est sous une forme universelle, pour tout *x* on a P(*x*), ce qui est souvent le cas, deux options s'offrent pour faire tomber la conjecture : (a) soit on la démontre, ce qui, si le problème est ancien, nécessitera certainement une longue démonstration ; (b) soit on produit un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple montrant qu'il existe un *x* tel que non-P(*x*).

Parmi les livres énumérant et commentant les conjectures mathématiques les plus intéressantes citons celui de Victor Klee, et Stan Wagon. *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,* Cambridge University Press, 1991 et celui de Richard Guy, *Unsolved Problems in Number Theory,* Springer-Verlag, 2004.

Dans certains cas la découverte d'un contre-exemple exige de très longs calculs et ne vient qu'après avoir mené de nombreux essais infructueux. L'un des exemples les plus étranges de cette situation est la conjecture de George Pólya formulée en 1919. Un entier est dit « de nature paire » (respectivement impaire) si son nombre de facteurs premiers est pair (respectivement impair). Deux exemples : 12 = 2 × 2 × 3 est de nature impaire, 56 = 2 × 2 × 2 × 7 de nature paire. Parmi les entiers entre 2 et *n*, il semble qu'il y a toujours plus de nombres de nature impaire que de nombres de nature paire. La conjecture de Pólya affirme que c'est vrai pour tout *n*. Pourtant, pour *n* = 906 150 257, c'est faux. Tester la conjecture jusqu'à mille, un million, dix millions, cent millions ne suffit pas à s'apercevoir qu'elle est fausse ! Un autre cas remarquable est que 2^n divisé par *n* ne donne jamais le reste 3, avant *n* = 4 700 063 497. L'exemple le plus spectaculaire d'une telle situation concerne cependant l'affirmation que les nombres $n^{17} + 9$ et $(n + 1)^{17} + 9$ n'ont jamais de facteurs premiers en commun. C'est vrai pour *n* = 1, 2, 3, 4,… mais c'est faux pour la première fois pour n = 8 424 432 925 592 889 329 288 197 322 308 900 672 459 420 460 792 433.


George Pólya (1887-1985)

Cet article comporte 27 auteurs, ce qui peut sembler beaucoup, mais est ridiculement faible comparé aux articles scientifiques record pour le nombre de contributeurs. Il est en effet devenu assez courant de voir des publications signées par des centaines de chercheurs. C'est en génomique et en physique des particules que le phénomène est le plus fréquent, car de grands projets impliquant parfois plusieurs laboratoires (comme celui du Cern à Genève) font signer tous les scientifiques et ingénieurs ayant participé de près ou de loin à la recherche dont l'article donne les résultats.

En mars 2015, un article proposant une mesure de la masse du boson de Higgs, qui avait été découvert trois ans plus tôt, a été publié par la revue *Physical Review Letters*. Il était signé par le nombre record de 5154 auteurs. La liste des signataires occupait 24 des 33 pages de l'article. Le titre de l'article est: «Combined measurement of the Higgs boson mass in pp collisions at $\sqrt{s}$ = 7 and 8 TeV with the ATLAS and CMS experiments» (Mesure combinée de la masse du boson de Higgs dans les collisions pp à $\sqrt{s}$ = 7 and 8 TeV avec les expériences ATLAS et CMS).

La liste des auteurs n'était pas placée en tête de l'article, comme c'est l'usage, mais à la fin, par crainte peut-être qu'un éventuel lecteur ne se lasse de tourner les pages à la recherche du texte. Les auteurs figurent par ordre alphabétique. Le premier est Georges Aad, du Centre de physique des particules de Marseille. La chance extraordinaire qu'il a de posséder un nom commençant par *Aa* lui permet d'être le seul auteur de l'article apparaissant en première page où sous le titre est seulement indiqué «G. Aad *et al.*».

Bien que la notion d'article scientifique le plus cité soit assez délicate, car elle dépend de la liste de journaux et de revues qu'on prend en compte, qui peut être plus ou moins restrictive, les divers sites qui se sont intéressés à la question s'accordent entre eux. L'article scientifique le plus cité a été publié en 1951 dans *The Journal of Biological Chemistry*. Le premier auteur est Oliver Lowry et son titre est «Protein measurement with the Folin phenol reagent» (Mesure des protéines avec le réactif phénolique de Folin). Son importance est liée à la méthode de mesure introduite qui a ensuite été utilisée et perfectionnée un grand nombre de fois. D'après le site Google Scholar, en janvier 2023, l'article avait été cité par 223036 autres articles scientifiques.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les records liés aux mathématiques et en particulier aux démonstrations et calculs. Un résultat mathématique est d'autant plus surprenant et intéressant qu'il s'énonce assez simplement et exige une longue démonstration.

Les records de longueur pour les démonstrations méritent donc une attention particulière puisqu'ils concernent *a priori* des résultats intéressants.

SIMPLIFICATIONS DES PREUVES

La question est cependant délicate, car il faut s'entendre sur ce qu'on appelle «longueur d'une démonstration». La première option consiste à prendre en compte la longueur du texte, mesurée en pages, dans la ou les revues qui l'ont publié. Le record semble alors être la démonstration du théorème de classification des groupes finis simples, parfois dénommé «théorème géant».

Les groupes finis simples ne se décomposent pas en sous-groupes plus petits ; ils sont en quelque sorte l'équivalent des nombres premiers pour la théorie des groupes. Les connaître tous est donc souhaitable. Leur recherche s'est révélée difficile, car à côté de plusieurs séries infinies de groupes déjà identifiées, on a découvert qu'il existe quelques groupes finis simples isolés et n'entrant dans aucune des catégories connues. Ces groupes singuliers sont au nombre de 26 et se nomment «les groupes

3 LA PLUS LONGUE PREUVE ?

Le mathématicien Issai Schur (1875-1941) étudia les propriétés des partitions de l'ensemble infini des nombres entiers positifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,... en un nombre fini k de paquets disjoints P_1, P_2,..., P_k. Pour illustrer son propos, nous colorions tous les nombres appartenant à un même paquet de la même couleur. Par exemple pour $k = 3$, trois paquets donc trois couleurs, un exemple de partition des entiers est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,... avec P_1 = 1, 2, 4, 7, 8,... ; P_2 = 3, 10,... ; P_3 = 5, 6, 9, 11,...

En 1917, Schur démontra que si on n'utilise qu'un nombre fini de couleurs, alors il existe toujours trois nombres a, b et c de la même couleur vérifiant $a + b = c$, avec la liberté de répéter le même nombre, par exemple $2a = c$; dans notre exemple le paquet P_1 vérifie la propriété, car 1 + 1 = 2 (et aussi 2 + 2 = 4 et 4 + 4 = 8) ; le paquet P_3 convient aussi car 5 + 6 = 11.

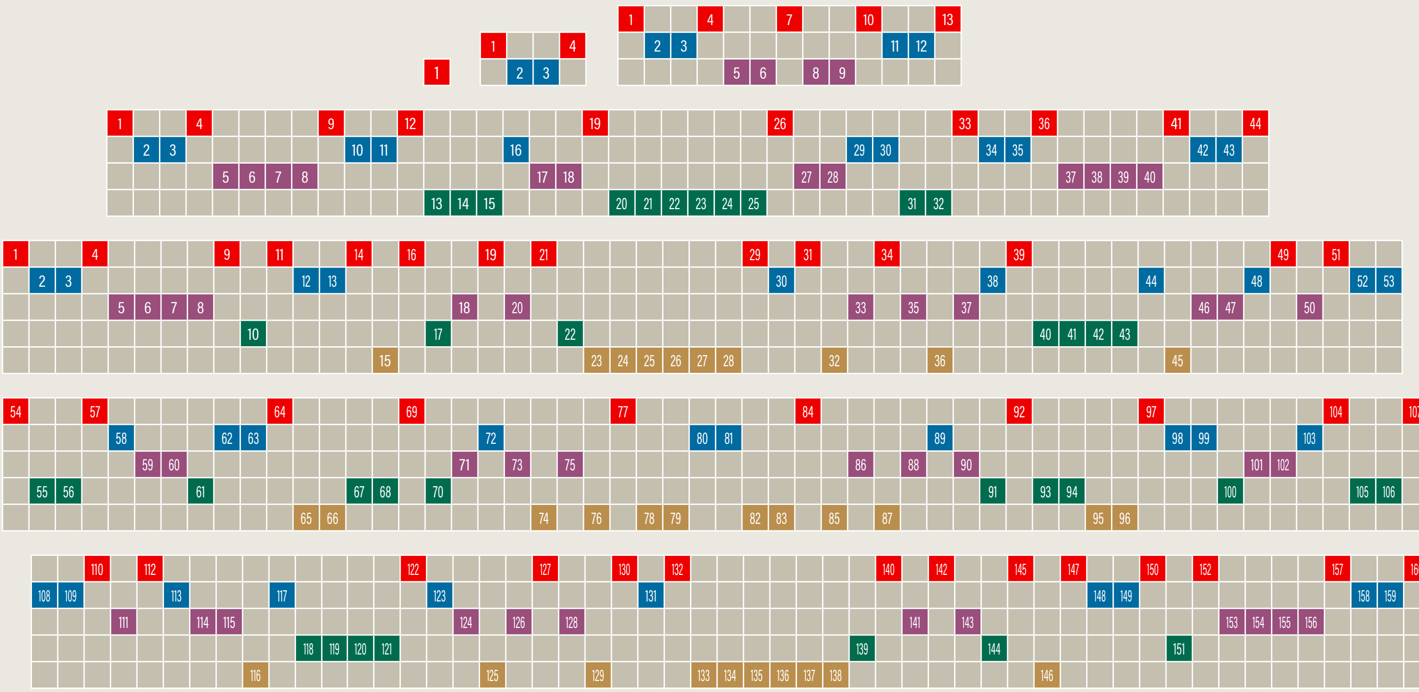
Un résultat mathématique important crée de nouveaux problèmes, et nous allons nous intéresser aux partitions de la suite finie des entiers 1, 2,..., n. La question est de déterminer, pour tout entier k, le plus petit nombre n tel que la partition de l'ensemble {1, 2,..., n} en k paquets oblige qu'un des paquets contienne trois nombres a, b, c vérifiant $a + b = c$. Ce plus petit entier est dénommé « nombre de Schur » pour k et noté S(k).

Démontrons que S(2) = 5.

Il existe une partition unique de {1, 2, 3, 4} en deux paquets dont aucune ne contient trois entiers a, b, c tel que $a + b = c$. C'est la partition {1, 4}, {2, 3} et c'est la seule, comme le montre le raisonnement suivant. Nous commençons par mettre 1 dans un paquet. Alors 2 est dans l'autre (à cause de 1 + 1 = 2). Le nombre 4 est alors avec 1 (car 2 + 2 = 4), et le nombre 3 est avec 2 (car 1 + 3 = 4). De l'unicité de cette partition pour 4, on en déduit qu'il n'existe pas de bonne partition de {1, 2, 3, 4, 5} en deux car, quand on ajoute 5 au premier paquet, on a 1 + 4 = 5 et, quand on l'ajoute au second paquet, on a 2 + 3 = 5.

Les nombres de Schur connus étaient jusqu'à récemment S(1) = 2, S(2) = 5, S(3) = 14, S(4) = 45. La démonstration que S(5) = 161 résulte d'une preuve automatique dont le texte d'une longueur colossale occupe 2 pétaoctets. Elle a été obtenue en 2017 par Marijn Heule. C'est la preuve la plus longue connue, mais ce titre est peut-être provisoire car il est probable qu'on trouve une preuve plus courte du résultat.

La figure ci-dessous réalisée par Marijn Heule représente des partitions en 2 paquets, 3 paquets, 4 paquets, 5 paquets évitant $a + b = c$ dans un même paquet pour les entiers jusqu'à 4 = S(2) – 1, 13 = S(3) – 1, 44 = S(4) – 1 et 160 = S(5) – 1.



sporadiques». Le plus grand d'entre eux, dénommé «le groupe monstre», a été identifié en 1980 par le mathématicien américain Robert Griess. Son nombre d'éléments est: 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 = 246 × 320 × 59 × 76 × 112 × 13 3 × 17 × 19 × 23 × 29 × 31 × 41 × 47 × 59 × 71 ≈ 8×10^{53}.

La démonstration du théorème des groupes finis simples couvre plus de 5000 pages

La preuve du théorème indiquant la liste des groupes finis simples et montrant qu'il n'y en a pas d'autres est dispersée dans plus de 5000 articles dont la longueur totale est d'environ 15000 pages. Des efforts ont été menés pour obtenir une démonstration plus courte et plus convaincante. En 2023, neuf volumes de cette nouvelle preuve ont été publiés, et on estime que cinq sont encore nécessaires. La nouvelle démonstration occupera quand même plus de 5000 pages.

Il est naturel de se demander s'il existe une preuve beaucoup plus courte, car des exemples spectaculaires de raccourcissement de preuve se sont produits plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques. Un exemple frappant est celui du résultat dénommé aujourd'hui «théorème d'Abel-Ruffini». Le théorème indique qu'il existe des polynômes de degré cinq ou plus dont les racines ne s'expriment pas avec des radicaux (racines carrées, racines cubiques, etc.), contrairement à ce qui se produit pour les polynômes de degré un, deux, trois et quatre. La première démonstration fut proposée en 1799 par le mathématicien italien Paolo Ruffini, elle comptait plus de 500 pages. Sa preuve est délicate et il y a des doutes sur son exactitude. En 1824, le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel publia une preuve du théorème en six pages, qui cette fois a été définitivement acceptée. Un autre exemple remarquable de raccourcissement est la preuve proposée en 1905 par le joueur d'échecs et mathématicien allemand Emanuel Lasker du théorème d'algèbre dénommé aujourd'hui «théorème de Lasker-Noether», qui occupait 98 pages. Elle a depuis été simplifiée pour n'occuper qu'une seule page.

UNE DÉMONSTRATION LONGUE RACCOURCIE...

4

Tout le monde connaît les deux formules qui donnent les solutions d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, formules qui utilisent des racines carrées. Il existe des formules analogues plus compliquées pour les polynômes de degré 3 et de degré 4. En 1799, Paolo Ruffini publia un traité de plus de 500 pages dans lequel il prétendait démontrer qu'à partir du degré 5 pour un polynôme P, on ne peut pas disposer de formules générales utilisant des radicaux (racines carrées, racines cubiques, etc.) donnant les solutions de l'équation $P(x) = 0$. Un raccourci de cette preuve en six pages fut plus tard proposé par Niels Henrik Abel, qui d'ailleurs considérait la preuve de Ruffini illisible.

Paolo Ruffini (1765-1822)

Neils Henrik Abel (1802-1829)

PREUVES FORMELLES ET INFORMATIQUES

Aujourd'hui, on essaie d'utiliser des méthodes informatiques de validation des preuves les plus longues, mais malgré de nombreux progrès, le défi est difficile et on est encore loin, par exemple, de pouvoir s'attaquer au théorème géant.

La seconde option, plus rigoureuse, pour mesurer la longueur d'une démonstration, consiste à prendre en compte le nombre de symboles qu'elle exige quand on l'écrit dans un langage de référence. De tels langages existent, ce sont les langages formels comme celui décrit dans le premier livre de l'encyclopédie *Éléments de mathématique*, de Nicolas Bourbaki. On en trouve de plus récents, liés aux systèmes informatiques d'aide à l'écriture et à la validation des preuves, dénommés «assistants de preuves». D'un langage formel à l'autre, il subsiste de grandes différences entre la longueur des preuves écrites, ce qui rend arbitraire l'attribution du titre de preuve la plus longue.

Cependant, certains chercheurs ont proclamé avoir produit la démonstration informatique la plus longue. Un record de ce type a été publié en 2018 par Marijn Heule, de l'université du Texas à Austin, qui a expliqué avoir trouvé une démonstration par ordinateur d'une longueur de deux pétaoctets prouvant que le cinquième nombre de Schur est 161 (*voir*

5 OÙ EN SOMMES-NOUS DES RECORDS DE CALCUL ?

Les deux records de calcul les plus populaires parmi les mathématiciens sont le calcul des décimales de π et le calcul du plus grand nombre premier. Où en sommes-nous aujourd'hui ?
Pour π, le dernier record a été obtenu le 21 mars 2022 par la Japonaise Emma Haruka Iwao, qui travaille pour Google. Son calcul a produit cent mille milliards de décimales du nombre π (10^{14} décimales). La formule principale utilisée pour le calcul est une formule des deux frères ukrainiens David et Gregory Chudnovsky.
Le programme utilisé est le programme y-cruncher V0.7.8 d'Alexander Yee, programme à qui on doit tous les records de calcul de π depuis dix ans. Le calcul a duré 157 jours et 23 heures et a exigé 515 téraoctets (515 x 10^{12} octets) de mémoire.
On sait démontrer, depuis Euclide, qu'il y a une infinité de nombres premiers, mais on ne sait en calculer explicitement (en les écrivant en base 10) qu'un nombre fini. Le plus grand nombre premier effectivement calculé est $2^{82\,589\,933} - 1$. Il comporte 24 862 048 chiffres décimaux. Il a été découvert le 7 décembre 2018 par Patrick Laroche, d'Ocala, en Floride, qui participait au programme collaboratif de calcul GIMPS *(The Great Internet Mersenne Prime Search)*. Ce programme associe une multitude de volontaires utilisant leurs propres machines pour la recherche de nouveaux nombres premiers. Le travail fonctionne en continu, aujourd'hui encore à la recherche du record suivant *(voir https://www.mersenne.org)*.
La quantité de calcul cumulée pour arriver à ce résultat est difficile à évaluer, mais elle dépasse probablement celle mise en œuvre pour le record de π.

Formule de Chudnovsky

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!(545140134n + 13591409)}{(3n)!\,(n!)^3\,(-262537412640768000)^n}$$

l'encadré 3). Personne n'a depuis annoncé avoir fait mieux (pire ?). Deux pétaoctets correspondent à 2×10^{15} caractères, ce qui à raison de 2 000 caractères par page donnerait, si on l'imprimait, une démonstration de mille milliards de pages. Lire ces pages à raison d'une par minute exigerait environ deux millions d'années à un mathématicien qui se consacrerait uniquement à cette tâche !

RECORDS DOUTEUX

Il ne fait aucun doute que cette longue démonstration informatique est un formidable exploit, mais il existe trois arguments conduisant à remettre en question le fait que ce record puisse être considéré vraiment sérieusement et qu'on puisse lui donner un sens précis : (a) la possibilité pratique du raccourcissement, (b) les théorèmes généraux de raccourcissement et (c) le fait que tout calcul est une forme de démonstration. Détaillons ces arguments.

(a) Il est toujours possible de s'y prendre mal pour démontrer un résultat mathématique et de n'en proposer qu'une preuve inutilement longue. C'était sans doute le cas de la preuve de Ruffini, et on connaît d'autres cas dont, en particulier, la démonstration de l'existence du groupe sporadique dénommé « Lyons group » qui, dans un premier temps, en 1973, a été établi par un calcul informatique en manipulant des matrices ayant des centaines de millions d'éléments, avant d'être retrouvé par une démonstration de moins de dix pages n'utilisant aucun ordinateur.

(b) La possibilité de raccourcissement en changeant de formalisme pour écrire les démonstrations n'est pas accidentelle, mais d'après des résultats de logique mathématique se produit systématiquement. L'un de ces résultats est dû au fameux mathématicien autrichien Kurt Gödel, complété par les mathématiciens d'origine polonaise Andrzej Ehrenfeucht et Jan Mycielski. Il indique que, pour tout système formel S non contradictoire permettant la démonstration des énoncés d'arithmétique élémentaire, et pour tout système formel S', obtenu en ajoutant aux axiomes de S un énoncé indécidable G (G et non-G ne sont pas démontrables dans S), il existe des théorèmes dont la démonstration la plus courte dans S' est un milliard de fois plus petite que la démonstration la plus courte dans S. Cette valeur de un milliard est arbitraire et peut être remplacée par n'importe quel entier.

(c) À côté des démonstrations informatiques record, les records de calcul peuvent être évoqués, car un calcul est une forme de démonstration dont les étapes sont les opérations intermédiaires qui, si on les enregistre, sont une preuve de la correction générale du calcul. Le dernier calcul record du nombre π rendu public le 21 mars 2022 en donne cent mille milliards de décimales (10^{14} décimales). Si on en mémorisait toutes les étapes, on obtiendrait une démonstration du résultat. Ce calcul ayant demandé 158 jours avec de puissants dispositifs informatiques, il est certain que la démonstration associée dépasse en taille celle concernant le cinquième nombre de Schur. Le paradoxe de ce type de résultat concernant π est que non seulement aucun mathématicien ne peut seul en vérifier l'exactitude, mais qu'aucun mathématicien ne peut simplement en prendre connaissance : lire les cent mille milliards de décimales calculées, à raison d'une par seconde, exigerait plus de trois millions d'années.

Battre des records en mathématiques et plus généralement en science est amusant et difficile, mais rarement très sérieux ! ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Caldwell, **The largest known primes – A Summary**, 2022. https ://primes.utm.edu/largest.html

M. Heule, **Schur number five,** *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2018.

R. Guy, **The second strong law of small numbers,** *Mathematics Magazine*, 1990.

R. Guy, **The strong law of small numbers,** *The American Mathematical Monthly*, 1988.

K. Gödel, **Über die Länge von Beweisen,** Ergbnisse eines mathematischen Kolloquiums 7, 1936. Repris et traduit sous le titre « On the length of proofs » dans les Collected Works. Volume I, Oxford University Press, 1986.

I. Schur, **Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m$ (mod p),** *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-vereinigung*, 1917.