RENDEZ-VOUS

DES SUITES À LA DYNAMIQUE INSAISISSABLE

Certaines règles simples engendrent des situations mathématiques étranges qu'il est difficile de comprendre totalement.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Faut-il être un professionnel pour s'adonner à la recherche mathématique? Non. Le plus bel exemple que je connaisse est celui d'Éric Angelini dont j'ai déjà mentionné les idées dans plusieurs articles de cette rubrique, et dont nous allons évoquer une des trouvailles récentes et particulièrement étranges… dont l'élucidation complète est loin d'être terminée.

Éric Angelini, qui vit en Belgique, est journaliste et producteur de télévision. Il m'a indiqué qu'il aimait les mathématiques depuis toujours bien que n'ayant jamais poursuivi d'études dans cette discipline au-delà du bac. Il est aussi passionné de jeu d'échecs et de bridge. Il apprécie particulièrement les suites numériques – d'ailleurs son nom est mentionné plus de 1800 fois dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (l'OEIS), ce qui est un exploit remarquable prouvant son incroyable activité!

CROÎTRE OU DÉCROÎTRE

Nous allons nous concentrer sur une règle simple engendrant des suites. Proposée par Éric Angelini il y a quelques mois, elle circule entre amateurs et a provoqué l'écriture de nombreux programmes informatiques conduisant à la découverte de propriétés inattendues des suites de nombres entiers qui croissent et décroissent en suivant cette règle.

Quand deux types d'évolutions s'opposent, il est parfois impossible de savoir qui l'emportera. Dans le domaine des suites numériques, la célèbre suite de Collatz – aussi connue sous le nom de suite de Syracuse – est le prototype même de ces problèmes difficiles. Pour la suite de Collatz, la règle s'énonce en quelques mots: si N est pair on le divise par 2 (décroissance), si N est impair on le remplace par 3N+1 (croissance). On constate en pratique que «décroître» finit toujours par gagner la bataille contre «croître», car la suite créée aboutit à 1, comme quand on commence avec N=12:
$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Pour la règle de Collatz, on constate la convergence vers 1 pour tous les entiers qu'on a testés – jusqu'à 2^{68} –, mais personne ne sait démontrer qu'il n'y a pas d'exception pour des points de départ plus grands.

La règle proposée par Éric Angelini est aussi du type «croître ou décroître», mais ses propriétés dépassent largement en étrangeté celle de Collatz. Partant de N écrit en base 10, par exemple N=11248, on fait la somme de ses chiffres, S=1+1+2+4+8=16, qu'on écrit à droite de N pour former un nouveau nombre. C'est l'opération de croissance, notée ⇒. On obtient 1124816.

On recommence jusqu'à ce que le premier chiffre de N soit présent parmi ceux de S. Alors, on enlève du nombre auquel on est arrivé toutes les occurrences de ce chiffre. C'est le cas dans notre exemple: 1124816 (le 1 qui débute 1124816 est l'un des chiffres de S=16 que l'on vient d'ajouter). Le nombre 1124816 se simplifie donc en 2486. Cette opération de décroissance est notée →. Une étape de décroissance ne peut survenir qu'après une étape de

Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

croissance. Quand on opérera des calculs sur la longueur des suites obtenues, on ne comptera que les étapes de croissance. Les premières étapes de la suite commençant à 11 (qui donne rapidement 11248) sont indiquées dans le premier tableau de l'encadré 1.

Remarquez que lorsqu'un zéro se présente en tête du nombre courant, on le garde en attendant qu'un zéro apparaisse dans la somme S. Dans notre exemple, cela se produit avec l'effacement des 6 de 6012736546566 7064, qui fait apparaître un zéro en tête de N, zéro qui disparaît quand S = 70, avec 0127354570438496270.

Si on part de 3, on a 3 ⇒ 33 → *rien*: les deux 3 sont retirés, il ne reste rien, le nombre courant s'annihile! Il en va de même pour les points de départ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. La question du devenir de 11 est donc la première question non évidente posée par les règles. Remarquez qu'un nombre très long peut très rapidement arriver à *rien*. Avec N = 7777777777 (10 fois le 7) on a 7777777777 ⇒ 777777777770 → 0 ⇒ 00 → *rien*. Et il en va de même avec 100 fois le 7, et plus généralement avec 10^k fois le nombre 7.

Il y a, semble-t-il, trois évolutions possibles.

– Cas 1. Annihilation: au bout d'un certain nombre d'étapes, on tombe, comme dans le cas N = 3, sur *rien*.

– Cas 2. Cycle: la suite de nombres revient à l'un de ses points antérieurs et se met donc à produire périodiquement les mêmes nombres dans le même ordre.

– Cas 3. Croissance infinie: le nombre de départ produit une suite infinie de nombres tous différents.

LA RÈGLE D'ÉRIC ANGELINI

1

La règle d'Éric Angelini *(ci-dessus)* transforme un entier N en un entier N′ en écrivant à la fin de N la somme S des chiffres de N (étape de croissance, notée ⇒), et le cas échéant en enlevant de N′ toutes les occurrences du chiffre C en tête de N′ lorsque C est l'un des chiffres de la somme S (étape de décroissance, notée →). La suite engendrée en partant de N = 11 arrive à *rien* (plus aucun chiffre) au bout de 1 399 142 étapes. Le nombre le plus long de cette suite partant de 11, de taille 222, est indiqué dans le second tableau.

Le début de la suite construite avec la règle d'Éric Angelini en partant de N = 11.

11 ⇒ 112 ⇒ 1124 ⇒ 11248 ⇒ 1124816 → 2486 ⇒ 248620 → 4860 ⇒ 486018 ⇒ 48601827 ⇒ 4860182736 ⇒ 486018273645 → 8601827365 ⇒ 860182736546 ⇒ 86018273654656 ⇒ 8601827365465667 ⇒ 860182736546566780 → 601273654656670 ⇒ 60127365465667064 → 01273545704 ⇒ 0127354570438 ⇒ 012735457043849 ⇒ 01273545704384962 ⇒ 0127354570438496270 → 1273545743849627 ⇒ 127354574384962777 ⇒ etc.

L'étape 1011802 de la suite construite avec la règle d'Éric Angelini en partant de N = 11.

44444441414444445414444414545445515515454551545456475651755554565767666446567767596161761641656152754155156257559265185325425535665835996226326436566736897127227337467637798281282383685386989291192293595296899110101012101 6

Le problème du devenir ultime de la suite quand on part de N = 11 est particulièrement coriace et vous ne réussirez pas à le traiter à la main. Il a cependant été résolu par Michael Branicky, de l'université du Kansas, qui après avoir écrit un programme a obtenu la réponse assez inattendue que la suite partant de 11 s'annihile à l'étape 1399142 (rappelons qu'on ne compte que les étapes de croissance, notées ⇒). Il a aussi précisé qu'elle passe à l'étape 1011802 par un nombre de longueur maximum 222, indiqué dans le second tableau de l'encadré 1.

Hans Havermann, un autre contributeur de l'OEIS, a poussé l'étude plus loin: les suites partant des nombres de 12 à 24 s'annihilent, comme celle partant de 11. Mais pour le nombre 25, on aboutit à un cycle (*voir encadré 2*). Le nombre de l'étape 209861 se retrouve à l'étape 793653, bien que les prédécesseurs soient différents. Cela crée une boucle de longueur 583792. La taille maximale des nombres de la suite est atteinte à l'étape 776829, mais bien sûr on la retrouve ensuite à chaque étape de la forme $776829 + 583792 \times n$.

Hans Havermann a aussi découvert que pour la grande majorité des points de départ, la suite associée finit par s'annihiler. Les premières exceptions où l'on tombe sur un cycle sont 25, 31, 63, 67, 69, 77, 92, 96, 99, 105, 109, 116, 133, 138, 148, 152, 161, 162, 163, 168, 174, 194, 197, 198, 206. Chose étrange, tous ces points de départ conduisent au même cycle. Mais en approfondissant sa recherche, Hans Havermann a trouvé que ce cycle de longueur 583792 n'était pas le seul. Il a identifié un cycle plus court, qui commence au nombre 546464465750000011711019071641751 et y revient en 49 étapes.

Par des approches de calculs massifs, on constate que le cycle le plus fréquent est celui de longueur 583792, qu'on trouve notamment en partant des nombres donnés dans le premier tableau de l'encadré 2.

Voici les points de départ des autres cycles découverts jusqu'à maintenant, classés par ordre de fréquence décroissante.

– Un cycle de longueur 120621, quand on part de 092, 245, 351, 395, 413, 433, 468, 571, 802, 0382, 0479, 0588, 0594, 0691, 0848, 0884, 0902...

– Un cycle de longueur 1723, quand on démarre à 695, 825, 905, 0655, 0857, 0864, 1385, 1857, 2695, 3078, 3285, 3857, 4189, 4857, 5778...

– Un cycle de longueur 14072, en partant de 323, 332, 3238, 3283, 3328, 5133, 7132...

– Un cycle de longueur 10538, en partant de 333, 3339, 3393...

– Un cycle de longueur 49, en partant de 243, 2439, 6782... (*voir https://bit.ly/42eYm1c*)

On ne connaît pas d'autres cycles, on ne sait pas s'il y en a une infinité, et, surtout, il reste la question élémentaire non résolue: existe-t-il une suite suivant la règle d'Éric Angelini qui ne s'annihile pas et ne produise jamais de cycle? Une telle suite va nécessairement vers l'infini, car, si elle ne s'arrête jamais et ne prend jamais deux fois la même valeur, tout nombre finit par être définitivement dépassé.

PAS DE DÉPART POUR L'INFINI

Je propose ici un raisonnement heuristique – c'est-à-dire pas entièrement rigoureux, mais qui suggère fortement un résultat – indiquant qu'il n'existe probablement pas de suite allant à l'infini. Il procède en deux temps.

– Affirmation 1. Il n'est pas possible que la règle de décroissance cesse définitivement de s'appliquer.

Supposons qu'on n'est pas dans un cas aboutissant à *rien* et que la règle de décroissance ne

2 UN CYCLE FANTASTIQUE ET INATTENDU

Les suites engendrées par la règle d'Éric Angelini aboutissent dans la majorité des cas à *rien*. Par exemple : 3 ⇒ 33 → *rien*. Mais le point de départ N = 25, lui, conduit à un cycle de longueur 583792 qui commence à l'étape 209861. Le tableau ci-contre donne quelques étapes du calcul, avec en indice et entre parenthèses le numéro des étapes.

Points de départ conduisant au cycle trouvé en partant de N = 25. Notez qu'on accepte de faire commencer N par zéro.

04, 09, 25, 31, 63, 67, 69, 77, 92, 96, 99, 023, 027, 031, 040, 042, 044, 049, 067, 074, 075, 081, 082, 090, 093, 099, 105, 109, 116, 133, 138, 148, 152, 161, 162, 163, 168, 174, 194, 197, 198, 206, 216, 253, 257, 258, 285, 307, 314, 327, 352, 370, 382, ...

Quelques étapes de la suite construite avec la règle d'Éric Angelini en partant de N = 25. La suite aboutit à un cycle.

25 ⇒ 257 ⇒ 25714 ⇒ 2571419 ⇒ 257141929 → 5714199 ⇒ 571419936 ⇒ 57141993645 → 714199364 ⇒ 71419936444 ⇒ 7141993644452 ⇒ 714199364445259 ⇒ 7141993644452573 → 141993644452593 ⇒ ... ⇒ $_{(209860)}$ 866908889849611111412012312914114719139152160167 ⇒ $_{(209861)}$ 866908889849611111412012312914114719139152160167181 → 669094961111141201231291411471913915216016711 ⇒ ... ⇒ $_{(776829)}$ 7577447547597444393374947933393373393543339337317383413493533735358374388474184314394554694885851481494511518532542553566583599622632643656673689712722733746763779828128238368538698929119229359529689911010101210161024103110361046 ⇒ ... ⇒ $_{(793652)}$ 86688909849611111412012312914114719139152160167 ⇒ $_{(793653)}$ 86688909849611111412012312914114719139152160167181 → 669094961111141201231291411471913915216016711

3 TROIS TYPES DE VOYAGES VERS L'INFINI

La somme-répétée d'un entier N (par exemple 97241) est ce qu'on obtient en additionnant les chiffres de N, et en recommençant tant qu'on n'est pas arrivé à un seul chiffre (9 + 7 + 2 + 4 + 1 = 23 ; 2 + 3 = 5).

La règle Angelini-V transforme un entier N en un entier N' en écrivant à la fin de N sa somme-répétée R si le premier chiffre C de N n'est pas le même que le dernier, ou en enlevant de N tous les C si c'est le cas (opération qui peut être faite plusieurs fois de suite). On découvre que quatre types de comportements principaux sont possibles pour une suite engendrée par un entier N. Type 1 : la suite engendrée aboutit à *rien*. Type 2 : à partir d'un certain moment, le nombre N s'allonge par un 9 à chaque étape. Type 3 : à partir d'un certain moment, le nombre N s'allonge alternativement par un 3 ou un 6. Type 4 : à partir d'un certain moment, le nombre s'allonge périodiquement par 1, 2, 4, 8, 7, 5.

TYPE 1
578159
5781598
57815987
578159875
781987
8198
19
191
9
rien

TYPE 2	TYPE 3	TYPE 4
57165	57127	57161
716	571274	571612
7165	5712748	5716124
71651	57127487	57161248
716512	571274875	571612487
7165124	7127487	5716124875
71651248	1248	71612487
716512487	12486	161248
1651248	124863	1612484
16512489	1248636	16124848
165124899	12486363	161248487
1651248999	124863636	1612484875
16512489999	1248636363	16124848751
165124899999	12486363636	62484875
1651248999999	124863636363	624848758
16512489999999	1248636363636	6248487587
165124899999999	12486363636363	62484875875
1651248999999999	124863636363636	624848758751
16512489999999999	1248636363636363	6248487587512
165124899999999999	12486363636363636	62484875875124
1651248999999999999	124863636363636363	624848758751248
16512489999999999999	1248636363636363636	6248487587512487
165124899999999999999	12486363636363636363	62484875875124875
1651248999999999999999	124863636363636363636	624848758751248751
16512489999999999999999	1248636363636363636363	6248487587512487512
165124899999999999999999	12486363636363636363636	62484875875124875124

s'applique jamais plus à partir d'un certain N. Quand N possède un milliard de chiffres, S vaut au plus 9 milliards. S possède ainsi 10 chiffres ou moins, et la somme des chiffres de S est inférieure à 90. L'opération d'adjoindre S à N fait donc qu'à l'étape suivante, on va calculer S' qui est inférieur ou égal à S+90. Pour passer de S à S', on ajoute un nombre assez petit à un assez grand nombre. Cela est encore plus vrai quand N possède plus d'un milliard de chiffres. Or quand on ajoute un petit nombre à un grand, on ne change son premier chiffre que d'une unité au plus. Donc si la règle de décroissance ne s'appliquait jamais, à partir d'un certain moment le premier chiffre de S passerait petit à petit par tous les chiffres: S augmenterait, mais ne changerait que rarement de premier chiffre, et, résultat, la suite des premiers chiffres de S ressemblerait à quelque chose comme 2, 2, 2, … , 2, 3, 3, 3, … , 3, 4, 4, …

À un moment, le premier chiffre de N (si ce n'est pas un 0) serait donc le premier chiffre de S, et N se simplifierait.

Le cas où le premier chiffre de N est 0 se traite de la même façon en remarquant que quand on adjoint un petit nombre à un grand, alors les deux premiers chiffres de S devenu lui aussi grand, lus comme un entier entre 00 et 99, ne peuvent augmenter que d'une unité, par exemple passer de 23 à 24, ou de 39 à 40, etc. Le zéro finira ainsi par être l'un des chiffres de S, par exemple quand le début de S passera de 19 à 20, ou de 29 à 30, etc. Il y aura alors une étape de décroissance.

La règle de décroissance finit donc toujours par s'appliquer.

– Affirmation 2. Il est impossible que la suite tende vers l'infini.

Quand une étape de décroissance se produit, si N est statistiquement assez quelconque (ici le raisonnement n'est qu'heuristique), on enlève à N un chiffre sur 10 ou plus. C'est en général plus qu'un chiffre sur 10, car le chiffre retiré à l'étape de décroissance précédente est en plus faible proportion, par conséquent celui qu'on enlève est présent dans N avec une fréquence supérieure à 1/10.

4

LE SEUL CYCLE CONNU POUR LA RÈGLE ANGELINI-V

Un seul cycle est connu pour la règle Angelini-V. On conjecture qu'il n'y en a pas d'autre. Il possède trente nombres. Il est représenté ici en commençant par le plus petit nombre du cycle. On appelle « comportement de type 5 » le fait d'aboutir à ce cycle. Le nombre 1142 est le plus petit nombre conduisant à ce cycle.

112124248487
1121242484878
11212424848787
112124248487875
1121242484878751
224248487875
2242484878757
22424848787575
224248487875751
2242484878757512
448487875751
4484878757515
44848787575151
448487875751512
4484878757515124
887875751512
8878757515121
88787575151212
887875751512124
8878757515121248
775751512124
7757515121242
77575151212424
775751512124248
7757515121242487
551512124248
5515121242484
55151212424848
551512124248487
5515121242484875

Quand une étape de croissance se produit, au moins un des chiffres de S change, sauf dans de rares cas particuliers. Il y a alors statistiquement une chance sur 10 (ou plus, car parfois plusieurs chiffres de S changent) que le nouveau chiffre dans S (ou un des nouveaux chiffres de S) corresponde à celui en tête de N. La règle de décroissance s'applique donc avec une fréquence d'au moins 1/10.

Quand N est très grand, les étapes de décroissance se produisent statistiquement plus d'une fois sur 10. Elles font baisser S de 10%, car on enlève en moyenne un chiffre sur 10 de N.

Entre deux étapes de décroissance, la longueur de N augmente successivement une dizaine de fois ou moins. L'augmentation de la longueur de N lors d'une étape de croissance est environ $\log_{10}(S)$, car c'est le nombre de chiffres décimaux de S. Entre deux étapes décroissantes, la longueur de N augmente, donc environ de $10\times\log_{10}(S)$ ou moins.

On sait que S/10 croît vers l'infini beaucoup plus vite que $10\times\log_{10}(S)$, quand S tend vers l'infini. Il n'est donc pas possible statistiquement que les étapes de décroissance, qui font perdre à S environ 10%, soient rattrapées par les étapes de croissance (entre deux étapes de décroissance), où S augmente de $4{,}5\times10\times\log_{10}(S)$ ou moins (le facteur 4,5 correspond à la moyenne des chiffres 0, 1, 2, ..., 9). Pour S, «décroître» est ainsi nécessairement gagnant contre «croître», et cela d'autant plus que N est grand. Comme on suppose que N est statistiquement quelconque, sa dynamique est la même que celle de S: «décroître» sort vainqueur du combat contre «croître» pour N également. Le nombre N ne peut pas tendre vers l'infini.

Ce raisonnement n'est pas parfaitement rigoureux, car on n'a pas d'information sur la répartition statistique des chiffres d'un nombre produit par la règle d'Éric Angelini. Cependant, quelques calculs confirment le bien-fondé des éléments du raisonnement heuristique et appuient sa conclusion.

Concernant l'affirmation 1: en essayant plusieurs millions de points de départ, il n'a jamais été possible de trouver plus de 27 étapes de croissance consécutives.

La seconde partie du raisonnement s'appuie sur l'idée que le nombre d'étapes de croissance entre deux étapes de décroissance est en moyenne inférieur à 10. Des calculs montrent que ce nombre est en moyenne de 4 pour des nombres de départ de 10 chiffres, puis va en diminuant pour des nombres de départ ayant plus de chiffres, avec par exemple une moyenne de 2,7 étapes de croissance entre deux étapes de décroissance pour des nombres ayant au départ 1000 chiffres.

Cette seconde partie du raisonnement s'appuie aussi sur l'idée que, lors d'une étape de décroissance, quand N est assez grand, la décroissance de S est de 10% ou plus. Des calculs effectués pour des nombres de 1000 chiffres montrent que, lors d'une étape de décroissance, S baisse en moyenne de 11%. Les éléments du raisonnement heuristique semblent de fait vérifiés empiriquement, suggérant une bonne probabilité à l'affirmation qu'il ne peut exister de point de départ produisant une suite tendant vers l'infini.

Un autre calcul montre que l'évolution moyenne de N entre deux étapes de décroissance est positive (N augmente) tant que le nombre de chiffres de N est inférieur à 83, mais qu'au-delà de 83 chiffres, N diminue en moyenne, malgré les étapes de croissance situées entre les deux étapes de décroissance. On en déduit que les suites ont tendance à croître jusqu'à 83 chiffres, mais qu'au-delà, elles baissent en moyenne.

S'ajoutant aux conjectures (a) qu'il n'y a pas de suite allant à l'infini et (b) qu'il n'y a jamais plus de 27 étapes de croissance consécutives, il est raisonnable d'ajouter la conjecture (c) qu'avec la règle d'Éric Angelini il n'y a qu'un nombre fini de cycles.

UNE VARIANTE NATURELLE

On peut imaginer une variante naturelle à la règle d'Éric Angelini. Cette variante, que nous nommerons «règle Angelini-V» (V pour variante), est assez amusante, car elle se plie plus facilement aux raisonnements mathématiques rigoureux et engendre une subtile typologie des suites créées dont on peut comprendre la logique... jusqu'à un certain point.

Pour calculer le successeur d'un nombre N avec Angelini-V, on évalue la somme de ses chiffres S, mais, si le résultat comporte plusieurs chiffres, on en fait la somme, et on recommence jusqu'à avoir un résultat d'un seul chiffre. On arrive à ce qu'on peut appeler la somme-répétée de N, qu'on notera R, et c'est ce chiffre qu'on écrit à la fin de N pour former N'. Pour N=1376, on calcule 1+3+7+6=17, puis 1+7=8, ce qui signifie que la somme-répétée de 1376 est 8; N=1376 est donc transformé en N'=13768. On reprend aussi l'idée de décroissance de la règle d'Éric Angelini, qui devient: si C le dernier chiffre de N est le même que le premier, on enlève tous les C présents dans N. On accepte de faire cette opération plusieurs fois de suite si c'est possible. En résumé: le successeur de N est ce qu'on obtient en supprimant successivement tous les C si C est à la fois le premier et le dernier chiffre de N (étape de décroissance), sinon en calculant R la somme-répétée des chiffres de N et en l'ajoutant comme dernier chiffre à N (étape de croissance).

Voici un premier exemple, en notant comme précédemment par ⇒ les étapes de croissance et par → les étapes de décroissance:

2527 ⇒ 25277 ⇒ 252775 ⇒ 2527751 ⇒

25277512 → 57751 ⇒ 577517 ⇒ 5775175 → 7717 → 1 → *rien*

La suite commençant par 2527 s'annihile assez rapidement.

Un autre exemple montre qu'une croissance infinie est possible avec la règle Angelini-V:

4969 ⇒ 49691 ⇒ 496912 ⇒ 4969124 → 96912 ⇒ 969129 → 612 ⇒ 6129 ⇒ 61299 ⇒ 612999 ⇒ 6129999 ⇒ ...

On peut analyser ce qu'il se passe. Une fois arrivé à 612, le calcul de la somme-répétée des chiffres donne 9; on adjoint donc un 9 à 612, ce qui donne 6129. Le fait d'avoir adjoint ce 9 augmente la somme-répétée de N de 9 unités, ce qui donne 9+9=18, qui se réduit au chiffre 1+8=9. On comprend alors qu'il en sera indéfiniment de même: la somme des chiffres de N sera toujours un multiple de 9, donc sa somme-répétée sera toujours égale à 9 et la suite s'allongera par des 9 indéfiniment. Cette situation se reproduira à chaque fois qu'après une étape de croissance on ajoutera comme somme-répétée un 9 à un nombre qui ne commence pas par 9 (cette dernière précision est importante pour éviter une étape de décroissance).

Un autre cas se laisse analyser:

4971 ⇒ 49713 ⇒ 497136 ⇒ 4971363 ⇒ 49713636 ⇒ 497136363 ⇒ 4971363636 ⇒ 49713636363 ⇒ 497136363636 ⇒ ...

Le nombre 4971 a pour somme-répétée 3, donc en l'ajoutant on obtient un nombre (49713) dont la somme-répétée est 3+3=6, qui donne un nombre dont la somme-répétée est 6+6=12 qui donne 3, qui donne un nombre dont la somme-répétée est 6, puis 3, puis 6, etc. La suite ira encore vers l'infini, mais cette fois en ajoutant alternativement un 3 et un 6 au nombre N. Cette situation se reproduira à chaque fois qu'après une étape de croissance on ajoutera comme somme-répétée un 3 ou un 6 à un nombre qui ne commence ni par 3 ni par 6.

Un troisième et dernier cas analogue se produit avec le nombre 4954:

4954 → 95 ⇒ 955 ⇒ 9551 ⇒ 95512 ⇒ 955124 ⇒ 9551248 ⇒ 95512487 ⇒ 955124875 ⇒ 9551248751 ⇒ 95512487512 ⇒ 955124875124 ⇒ 9551248751248 ⇒ ...

Les sommes-répétées à partir de 95 sont doublées à chaque fois et éventuellement réduites, ce qui donne successivement les chiffres supplémentaires 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, ... La suite va continuer à s'allonger comme dans les deux cas précédents, en suivant un accroissement périodique en 6 étapes. Comme précédemment, on remarque que cette situation se reproduira à chaque fois qu'après une étape de croissance, on ajoutera comme somme-répétée un des chiffres 5, 1, 2, 4, 8 ou 7 à un nombre qui ne commence par aucun de ces chiffres.

Il existe donc au moins quatre comportements types réguliers.

– Type 1. Arriver à *rien*.

– Type 2. Tomber dans l'ajout infini de 9.

– Type 3. Tomber dans l'ajout infini de 3 et de 6 alternativement.

– Type 4. Tomber dans l'ajout périodique des six chiffres 5, 1, 2, 4, 8, 7.

Une question se pose alors: ces quatre types de comportements sont-ils les seuls? En principe, deux autres types sont possibles.

– Type 5. La suite devient périodique.

– Type 6. Les nombres successifs sont tous différents (donc tendent vers l'infini), mais ne tombent jamais dans une situation correspondant aux types 1, 2, 3 ou 4.

En étudiant différents cas, j'ai d'abord pensé que les types 5 et 6 étaient tous les deux impossibles. À ma grande surprise, j'ai fini par découvrir un cas de type 5 quand on part de N=1142 (*voir encadré 4*). On remarquera qu'il survient plus tardivement que pour la règle d'Éric Angelini, où un cycle est obtenu pour le point de départ 25.

En prenant comme points de départ tous les nombres de 1 à un million, j'ai trouvé 630 cas de type 5 (donc 0,063% des cas) et aucun de type 6. La statistique sur ce million de cas est la suivante.

Type 1: 22642
Type 2: 442884
Type 3: 201618
Type 4: 332226
Type 5: 630

Le plus étonnant est que les 630 cycles trouvés sont tous identiques: ils comportent les mêmes trente nombres (*voir encadré 4*). D'autres recherches en prenant des nombres de départ aléatoires plus grands permettent de trouver d'autres points de départ conduisant à ce cycle. Jamais aucun point de départ ne semble donner un autre cycle ni aboutir au type 6. La conclusion temporaire de cette étude de la règle Angelini-V est donc que, vraisemblablement, tous les nombres se classent dans l'un des cinq premiers types ci-dessus. On formule alors les deux conjectures suivantes pour la règle Angelini-V.

(1) Il n'y a qu'un seul cycle, il a comme longueur 30 et c'est celui qu'on trouve en partant de 1142.

(2) Aucun point de départ ne donne des nombres dont la taille tend vers l'infini sans se ramener aux types 2, 3 ou 4.

Comparativement aux conjectures portant sur la règle d'Éric Angelini, celles sur la règle Angelini-V semblent mathématiquement plus abordables. Je vous invite donc à vous y intéresser, soit pour prouver qu'elles sont fausses en découvrant des contre-exemples, soit en proposant des raisonnements qui les établissent, heuristiquement... ou rigoureusement. ■

BIBLIOGRAPHIE

É. Angelini, **Does this iteration end ? (Sum and erase)**, Blog « Cinquante signes », 2022. https://bit.ly/PLS549_LC

M. Branicky, **Python program for an iteration defined by Eric Angelini**, 2022.

J. P. Delahaye, **La tenace conjecture de Syracuse,** *Pour la Science*, n° 529, 2021.

É. Angelini, **Jeux de suites,** *Dossier Pour la Science*, n° 59, 2008.