RENDEZ-VOUS

À LA RECHERCHE DE L'ORDRE CACHÉ

Quand une structure mathématique est grande, elle possède nécessairement des régularités. Des progrès mathématiques récents précisent cette règle.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

Des points placés sur un plan peuvent être alignés, ou, au contraire, être disposés sans aucun alignement de trois points parmi eux – on dit alors qu'ils sont « en position générale ». Le mathématicien aime bien montrer que, même disposées de manière aussi désordonnée que possible, de telles configurations possèdent, dès qu'elles sont assez grandes, des propriétés inévitables et *a priori* insoupçonnées : quoi que l'on fasse, on n'échappe pas à un peu d'ordre. Les propriétés de ce type sont nombreuses, souvent amusantes et, en général, plutôt difficiles à établir. Ce domaine de recherche, né dans la première moitié du XX^{e} siècle, grâce en particulier à Paul Erdös et Frank Ramsey, est à l'origine d'une multitude d'articles, d'algorithmes et de conjectures qui en font un des sujets les plus vivants de la recherche mathématique contemporaine.

Le théorème concernant les points d'un plan, découvert par la mathématicienne hongroise et australienne Esther Klein, est la manifestation la plus simple de cette présence obligatoire d'ordre. Il affirme qu'en plaçant cinq points ou plus sur un plan en position générale, il y en aura quatre qui seront les sommets d'un quadrilatère convexe, c'est-à-dire sans creux (*voir l'encadré 1*). Ce résultat, qu'on démontre facilement en faisant de petits dessins sur une feuille, a été généralisé en 1935 par Paul Erdös et George Szekeres sous la forme suivante, qui nous servira de repère pour la suite de l'article : « Pour tout entier $k \geq 3$, il existe un nombre minimal $f(k)$ tel que tout ensemble de $f(k)$ points ou plus, en position générale, contient k points formant les sommets d'un polygone convexe à k sommets. »

Le problème consistant à trouver des polygones convexes dans un ensemble de points a été appelé par Paul Erdös « problème à l'heureuse issue » (« happy ending problem »), car la rencontre d'Esther Klein et de George Szekeres autour de ces questions aboutit à leur mariage en 1937.

PRÉCISER LE RÉSULTAT

Nous allons voir que le théorème de 1935 peut être généralisé en considérant n points dans des espaces de dimension $d \geq 2$, ou en remplaçant les n points par n ovales, ou encore en imposant aux polygones convexes recherchés de ne contenir aucun autre des n points. Mais avant cela, intéressons-nous à la fonction $f(k)$ dont le théorème nous indique l'existence.

Trouver les valeurs de $f(k)$ se révèle d'une difficulté inattendue, qui occupe aujourd'hui encore les chercheurs. On sait, grâce à Esther Klein, que $f(4) = 5$. On sait aussi, grâce à Endre Makai Sr. et Pál Turán, que $f(5) = 9$, ce qui signifie deux choses :

(a) En plaçant neuf points sur un plan sans alignement de trois points parmi eux, il y en a toujours cinq d'entre eux qui forment les sommets d'un pentagone convexe.

(b) Il est possible de placer huit points sur un plan sans alignement de trois points parmi eux et sans qu'aucun sous-ensemble de cinq points ne forme les sommets d'un pentagone convexe (*voir l'encadré 1*).

La valeur $f(6) = 17$ a été démontrée par George Szekeres et Lindsay Peters. Leur preuve, publiée en 2006, repose sur une méthode informatique, dont ils ont réalisé trois programmations différentes pour s'assurer de sa correction. Les trois programmations aboutirent au même résultat.

Les premières valeurs ont suggéré la conjecture $f(k) = 2^{k-2}+1$, énoncée par Paul Erdös et George Szekeres dès leur article de 1935. La conjecture s'est révélée particulièrement ardue, et aujourd'hui aucune des valeurs de $f(k)$ autres que $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$ n'est connue avec exactitude. Heureusement, on connaît certaines inégalités s'appliquant à $f(k)$.

En 1961, les deux mathématiciens, qui n'avaient pas oublié les mystères soulevés par leur résultat de 1935, démontrèrent que $f(k) \geq 2^{k-2}+1$. Pour cela, ils construisirent pour chaque entier $k \geq 3$ une configuration de 2^{k-2} points ne comportant aucun sous-ensemble de k points formant les sommets d'un polygone convexe à k sommets (*voir l'encadré 2*).

L'article de 1935 établissait que

$$f(k) \leq \binom{2k-4}{k-2}, \text{ où } \binom{m}{p}$$

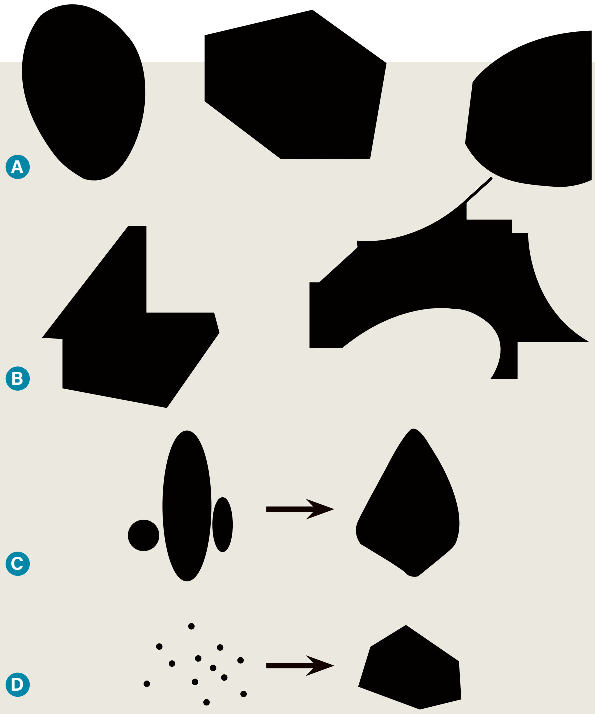
est le coefficient du binôme de Newton qui vaut $m!/(p!(m-p)!)$. Il s'agit d'une majoration très grossière puisque, par exemple, elle ne donne que $f(5) \leq 20$. Andrew Suk, de l'université de l'Illinois, à Chicago, a amélioré ce résultat en 2017 en démontrant que pour, k assez grand, $f(k) \leq 2^{k+6k^{2/3}\log_2(k)}$. La formulation de son résultat est un peu effrayante, mais elle est très fine et proche de la valeur affirmée par la conjecture $f(k) = 2^{k-2}+1$. En effet, le terme $6k^{2/3}\log_2(k)$ est petit devant k, et le devient de plus en plus quand k tend vers l'infini. Avec l'inégalité d'Andrew Suk, on déduit par exemple qu'il existe un k_0 tel que, pour tout $k>k_0$, $f(k) \leq 2^{1{,}000001\times k}$. Une légère amélioration du résultat a été obtenue en 2020 par une équipe de chercheurs autour d'Andreas Holmsen, du KAIST (Institut supérieur coréen des sciences et technologies), à Daejeon, en Corée du Sud : les chercheurs ont remplacé le facteur d'erreur $6k^{2/3}\log_2(k)$ par $C \times (k \times \log_2(k))^{1/2}$, où C est une constante positive.

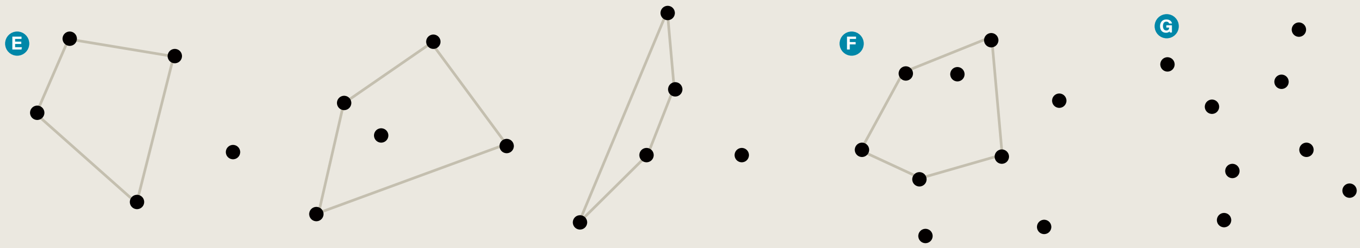
POINTS INTÉRIEURS

La présence d'un ordre minimal dans toute structure assez grande ne doit pas être considérée comme certaine : pour chaque type d'ordre elle exige une démonstration particulière. Une

1 CONVEXITÉ

Un sous-ensemble *E* du plan ou de l'espace de dimension *d* est convexe si, à chaque fois qu'on prend deux points dans *E*, le segment de droite joignant ces deux points est entièrement dans *E*.
Le dessin *(A)* donne trois exemples d'ensembles convexes du plan, et le dessin *(B)* deux exemples d'ensembles non convexes du plan.
L'enveloppe convexe d'un ensemble *E* de points du plan est le plus petit ensemble convexe qui contient *E*. Les dessins *(C)* et *(D)* montrent deux exemples de sous-ensembles du plan avec leurs enveloppes convexes respectives.
Esther Klein a remarqué que si l'on dessine cinq points sur un plan sans que jamais trois d'entre eux ne soient alignés, alors il y en a toujours quatre qui forment les sommets d'un quadrilatère convexe. En regardant les trois exemples du dessin *(E)*, on peut deviner la démonstration.
Si l'on se donne neuf points du plan sans alignement de trois d'entre eux, il y en a toujours cinq qui sont les sommets d'un pentagone convexe. C'est ce qu'illustre le dessin *(F)*.
Si l'on se donne huit points du plan, il se peut qu'aucun sous-ensemble de cinq points ne constitue les sommets d'un pentagone convexe. C'est ce que montre le dessin *(G)*.





2 COUPES ET CHAPEAUX

Trouver une configuration de huit points telle qu'aucun sous-ensemble de ces points ne soit un pentagone convexe *(voir le dessin (G) de l'encadré 1)* est assez facile et montre que $f(5) > 2^3$. Il est plus délicat d'établir qu'en général, si $k \geq 3$, alors $f(k) > 2^{k-2}$. Voici l'idée de la merveilleuse démonstration de ce résultat, qu'on trouvera avec plus de détails dans le livre de David Eppstein, *Forbidden Configurations in Discrete Geometry* (Cambridge University Press, 2018).

On considère d'abord le fameux triangle de Pascal contenant les coefficients binomiaux, montré dans le dessin *(A)*. On sait que, pour le constituer, il suffit de partir du 1 tout en haut et d'additionner, pour chaque nouvelle ligne, les deux nombres au-dessus de la case qu'on cherche à remplir. Le premier 15 de la septième ligne provient par exemple du 5 et du 10 juste au-dessus. On sait aussi que la somme des nombres de la ligne $k + 1$ vaut exactement 2^k, et donc que la somme des nombres de la ligne $k - 1$ est exactement 2^{k-2}.

En s'inspirant de ce triangle, on va construire une configuration de 2^{k-2} points ne contenant aucun polygone convexe à k sommets, ce qui prouvera que $f(k) > 2^{k-2}$, très proche de la conjecture de Paul Erdös et George Szekeres qui prédit que $f(k) = 2^{k-2} + 1$.

On définit d'abord les notions de configurations « chapeau » et « coupe ». Un chapeau est une suite montante de points dont les pentes des droites joignant deux points consécutifs sont décroissantes. Une coupe se définit de la même façon en remplaçant « décroissantes » par « croissantes », comme le montre le dessin *(C)*.

À chaque coefficient C du triangle de Pascal on associe une configuration de C points provenant, comme le coefficient C, de l'addition de ce qui se trouve dans les deux cases au-dessus. L'addition de deux configurations montantes G *(à gauche)* et D *(à droite)* est illustrée sur le dessin *(D)*. Elle consiste à placer les deux configurations pour qu'elles soient encore une configuration montante, en les éloignant assez l'une de l'autre pour que toutes les droites joignant deux points de G passent au-dessus de D et que toutes les droites joignant deux points de D passent en dessous de G. Cette opération a la propriété que, si une configuration formée de points de $G + D$ est un polygone convexe, alors les points pris dans G forment un chapeau et ceux pris dans D forment une coupe.

On en déduit (ce n'est pas totalement évident) qu'en additionnant une à une les configurations de la ligne $k - 1$ du triangle de Pascal des configurations, montré dans le dessin *(B)*, on obtient une configuration de 2^{k-2} points ne comportant aucun polyèdre convexe de k points. Le dessin *(E)* illustre ce qu'on obtient pour les lignes 1, 2, 3 et 4. Ce que donne la ligne 5 est trop large pour tenir sur la page !

A

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

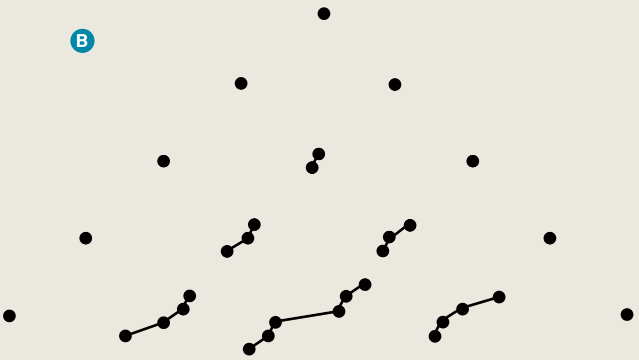
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Triangle de Pascal des nombres

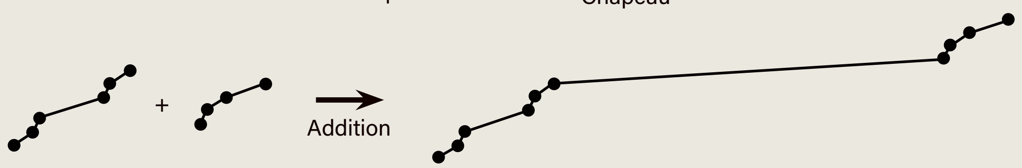
B



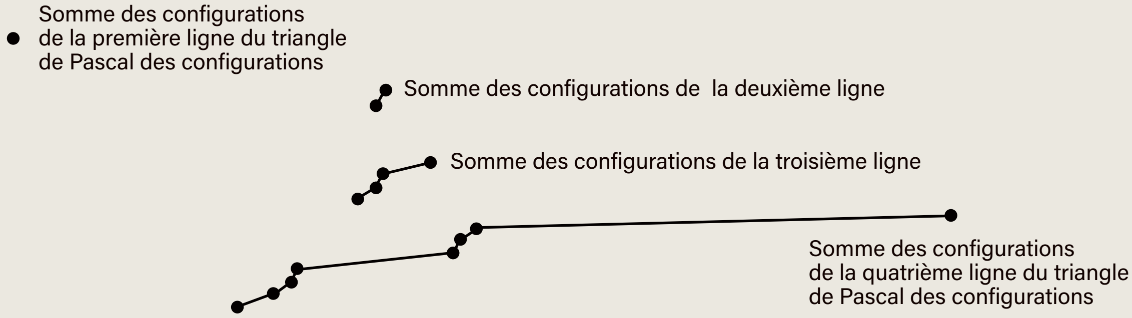
Triangle de Pascal des configurations

C

D



E



variante du résultat de Paul Erdös et George Szekeres, dite «variante du polygone convexe vide», l'illustre bien. Au lieu de rechercher des polygones convexes dans des ensembles de points en position quelconque, on recherche des polygones convexes ne contenant pas de point intérieur (c'est-à-dire pas d'autre point que ses sommets) dans l'ensemble des points. C'est une exigence plus forte, et donc la recherche d'un ordre caché plus étonnant. Pour k=3, 4, 5 et 6, le résultat se généralise et on obtient donc l'énoncé suivant: «En prenant n points en position générale dans le plan, si n est assez grand, on en trouvera toujours trois (respectivement quatre, cinq, six) formant un triangle (respectivement un quadrilatère convexe, un pentagone convexe, un hexagone convexe) ne contenant aucun autre des n points à l'intérieur.»

Le cas du triangle est évident, ceux du quadrilatère convexe et du pentagone convexe ont été démontrés rapidement. Le cas de l'hexagone vide n'a été résolu qu'en 2007 (nous en avions parlé dans cette rubrique en février 2009). Chose remarquable: on n'ira pas plus loin, car le résultat cesse d'être vrai pour les polygones convexes ayant plus de six côtés. Cela a été établi par Joseph Horton, de l'université du New Brunswick, au Canada, qui a construit des ensembles de points aussi grands qu'on le veut sans que sept d'entre eux ne soient jamais les sommets d'un polygone convexe vide à sept sommets. Les nombres de points qui assurent l'existence de polygones convexes vides sont notés $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ et $g(6)$, par analogie avec les $f(k)$ du théorème de 1935. Puisqu'aucune valeur finie de n n'est suffisante au-delà de k=7, on convient de noter que $g(k)=+\infty$ si $k \geq 7$.

3 RÉSULTATS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Dès que les points d'une configuration du plan sans alignement de trois points sont assez nombreux, on peut en trouver k formant un polygone convexe à k sommets. On connaît assez mal le seuil en dimension d, $f_d(k)$, assurant un résultat du même type. Le tableau *A* indique ce qu'on sait exactement dans le cas de la dimension d = 2 et pour les dimensions 3, 4, 5 et 6.
Le tableau *B* indique ce qu'on connaît quand on souhaite, en plus, que le polyèdre convexe ne contienne aucun autre point de la configuration. Le seuil assurant ce résultat en dimension d est noté $g_d(k)$. Dans ce tableau, le symbole « ∞ » indique que le résultat est faux (autrement dit, qu'il n'existe pas nécessairement de polygone convexe vide),
le symbole « ! » indique que la valeur seuil $g_d(k)$ est un entier inconnu, et le symbole « ? » indique qu'on ne sait pas si cette valeur est finie ou infinie. Ces tableaux résultent des calculs menés en 2023 par Manfred Scheucher, de l'université technique de Berlin, en Allemagne.

Tableau A, pour f

d \ k	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	9	17					
3	4	6	9	13				
4	4	5	7	9	≤13			
5	4	5	6	8	10	≤13		
6	4	5	6	7	9	11	13	

Tableau B, pour g

d \ k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	5	10	30–463	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	4	6	9	≤14	?	?	?	?	?	?
4	4	5	7	9	≤ 13	!	?	?	?	?
5	4	5	6	8	10	≤ 13	!	!	?	?
6	4	5	6	7	9	11	13	!	!	!

EN DIMENSION *D*

Une généralisation naturelle du théorème de Paul Erdös et George Szekeres consiste à envisager des points non plus dans le plan, mais dans l'espace, de dimension 3 ou même plus. En dimension $d \geq 3$, on convient de dire que k points sont «en position générale» si $d+1$ d'entre eux ne sont jamais dans un même hyperplan. En dimension 3, cela signifie simplement que quatre points ne sont jamais dans un même plan. On dit que k points forment un k-gone de l'espace de dimension d si aucun de ces k points n'est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des $k-1$ autres points.

Considérons par exemple les cinq solides de Platon qui sont le tétraèdre (quatre faces, quatre sommets), l'octaèdre (huit faces, six sommets), le cube (six faces, huit sommets), l'icosaèdre (vingt faces, douze sommets) et le dodécaèdre (douze faces, vingt sommets). Leurs sommets constituent à chaque fois un k-gone, mais seul le tétraèdre a ses sommets en position générale, car, pour chacun des autres, on trouve facilement quatre sommets, parfois cinq, appartenant à un même plan. En revanche, en déformant très légèrement chacun des solides de Platon pour éviter que quatre points soient dans un même plan, on obtient cinq exemples de k-gones ayant leurs sommets en position générale.

La démonstration de l'énoncé généralisant le résultat de 1935 en dimension d était connue de Paul Erdös et George Szekeres. L'énoncé en dimension quelconque introduit les nombres $f_d(k)$ généralisant les nombres $f(k)$: «Pour tout entier $k \geq 3$, il existe un nombre minimal $f_d(k)$ tel que tout ensemble de $f_d(k)$ points ou plus en position générale contient k points formant les sommets d'un k-gone.»

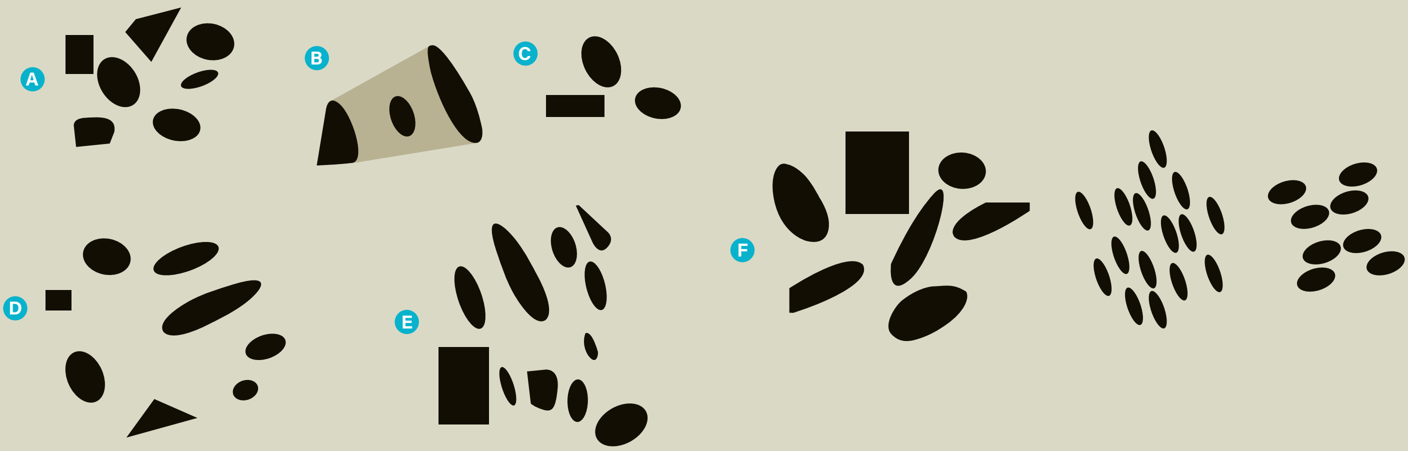
Quand on impose que les k-gones recherchés soient vides, on introduit les nombres $g_d(k)$, analogues aux $g(k)$, dont on convient qu'ils sont infinis quand le théorème n'est pas vrai.

Rechercher les valeurs des fonctions $f_d(k)$ et $g_d(k)$ est un terrible défi. En 2023, Manfred Scheucher, de l'université technique de Berlin, en Allemagne, a mis en œuvre des techniques informatiques nouvelles et des

4 DES POINTS AUX OVALES

On appelle « ovale » un sous-ensemble convexe *Ov* du plan, de taille bornée, et fermé au sens topologique (c'est-à-dire qu'il contient son bord). Il s'agit d'une généralisation de la notion de point. Les dessins en A donnent des exemples d'ovales, et on comprend que ce mot a ici un sens plus large que le sens courant.
On dit que trois ovales sont colinéaires si l'un est inclus dans l'enveloppe convexe des deux autres. Le dessin B donne un exemple de trois ovales colinéaires, et le dessin C un exemple de trois ovales non colinéaires.
On dit que k ovales sont en position générale s'ils sont deux à deux disjoints et s'il n'y en a jamais trois colinéaires. Un exemple d'ovales en position générale est dessiné en D et un exemple d'ovales qui ne sont pas en position générale en E.

On appelle k-gone généralisé une famille de k ovales disjoints deux à deux dont aucun des ovales n'est inclus dans l'enveloppe convexe des autres. C'est la notion qui généralise celle de polygone convexe.
La généralisation du théorème de 1935 de Paul Erdös et George Szekeres affirme que, pour tout entier $k \geq 3$, il existe un plus petit entier $f'(k)$ tel que tout ensemble de $f'(k)$ ovales ou plus en position générale dans le plan contient k ovales formant les sommets d'un k-gone généralisé. Le dessin F montre trois exemples. Pour le premier on trouve facilement un 6-gone généralisé. Pour le second on trouve un 8-gone généralisé. Le troisième est une configuration contenant des 4-gones généralisés, mais aucun 5-gone généralisé.



calculs massifs pour améliorer notre connaissance de ces nombres. Les tableaux A et B de l'encadré 3 indiquent les nouvelles valeurs découvertes par Manfred Scheucher et les anciennes qu'il a contrôlées soigneusement grâce à ses programmes.

AVEC DES OVALES

Il est rare qu'un théorème ne puisse pas être généralisé, et il y a même parfois plusieurs façons de le faire. Pour le théorème de 1935, en plus de la généralisation à la dimension d, une étonnante variante a été proposée par Ted Bisztriczky, de l'université de Calgary, au Canada, et Gabor Fejes Tóth, de l'université polytechnique et économique de Budapest, en Hongrie. Leur article a été publié en l'honneur du 75e anniversaire de Paul Erdös. La variante consiste à remplacer les notions de «point», de «points en position générale» et de «polyèdres convexes à k côtés» respectivement par les notions d'«ovale», d'«ovales en position générale» et de «k-gones généralisés». L'énoncé du théorème de 1935 devient alors: «Pour tout entier $k \geq 3$, il existe un nombre minimal $f'(k)$ tel que tout ensemble de $f'(k)$ ovales ou plus en position générale contient k ovales formant les sommets d'un k-gone généralisé.»

On conjecture que pour tout entier k, $f'(k) = f(k)$, mais ce n'est pas démontré.

L'encadré 4 explique les termes utilisés dans ce théorème et propose des illustrations pour en comprendre le sens. Les auteurs de cette généralisation font remarquer qu'aucune des quatre démonstrations connues du théorème initial de 1935 ne s'adapte, et qu'il leur a donc fallu en concevoir une assez différente pour leur version avec des ovales.

INÉVITABLES DROITES ORDINAIRES

Toujours au sujet des dispositions de points dans un plan, le théorème de James Sylvester, abordé dans cette rubrique en juin 2021, affirme que si n points sont disposés dans un plan et qu'ils ne sont pas tous sur une même droite, alors au moins deux d'entre eux déterminent une droite ne contenant aucun autre point. Une telle droite s'appelle une «droite ordinaire pour l'ensemble des n points». Autrement dit, la seule façon de placer n points sur un plan de sorte que toute droite qui passe par deux points en rencontre un troisième est d'aligner les n points. Le théorème ne fut démontré qu'en 1941. Sans surprise, le nombre de droites ordinaires inévitables déterminées par n points non colinéaires augmente en fonction de n. En 2013, le célèbre mathématicien américain Terence Tao et son collègue Ben Green ont démontré dans un difficile article de 60 pages que, si n est assez grand, ce nombre de droites ordinaires inévitables est au moins $n/2$. Cela peut être vu, là encore, comme la présence d'un ordre caché et croissant en fonction de n.

PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

L'existence d'un ordre caché inévitable ne concerne pas seulement les structures géométriques, mais aussi les ensembles de nombres entiers. Une fantastique conjecture de Paul Erdös, parfois appelée conjecture d'Erdös-Turán, a récemment été l'objet d'attention et d'importants progrès. Elle affirme que, si un sous-ensemble de nombres entiers A est tel que la somme des inverses de ses éléments est infinie, alors A contient des suites d'entiers en progression arithmétique $(a, a+r, a+2r, ..., a+kr)$ de longueur k, pour tout entier $k \geq 3$.

L'ensemble $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ des nombres premiers, par exemple, possède la propriété que la somme des inverses de ses éléments est infinie. Et effectivement, Ben Green et Terence Tao (encore eux!) ont montré que P contient des suites en progression arithmétique de toute longueur. Ne croyez pas qu'une telle conclusion s'obtienne facilement: le résultat, publié en 2008 dans la prestigieuse revue *Annals of Mathematics*, a été salué comme une avancée majeure, et sa démonstration occupe 66 pages.

Aujourd'hui, le cas général de la conjecture est très loin d'être établi. Mais en 2020, Thomas Bloom et Olof Sisask ont réussi à démontrer que, sous la condition que la somme de l'inverse des nombres de A soit infinie, alors A contient au moins une série de trois nombres en progression arithmétique $(a, a+r, a+2r)$.

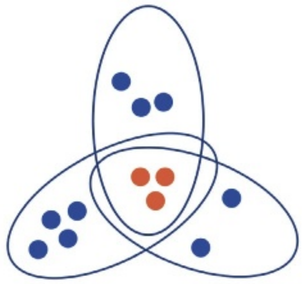
La condition sur la somme des inverses est une condition de densité: si un ensemble est trop dispersé – comme l'ensemble des carrés des entiers, par exemple – alors la somme de ses inverses est finie. On s'est donc intéressé à d'autres conditions de densité, plus faibles que celle de la conjecture d'Erdös-Turán, mais juste assez fortes pour qu'elles impliquent l'existence dans A d'une série de trois nombres en progression arithmétique. Le dernier résultat dans cette direction date de l'année 2023 et est encore dû à Thomas Bloom et Olof Sisask, améliorant un résultat de Zander Kelley et Raghu Meka datant de la même année. Ils ont montré que, si le nombre k d'éléments d'un ensemble A inclus dans $\{1, 2, ..., n\}$ dépasse $n \times \exp(-c \times \log_2(n)^{1/11})$ pour une certaine constante positive c – il s'agit bien d'une affirmation de densité minimum –, alors A contient au moins une série de trois termes en progression arithmétique.

TOURNESOLS ENSEMBLISTES

Terminons notre petit tour des résultats récents concernant l'ordre inévitable par un résultat sur les «configurations tournesol». Ceux dont nous allons parler n'ont rien à voir avec les fleurs, car ce sont des configurations présentes ou absentes quand on se donne des familles d'ensembles. Une famille d'ensembles étant donnée, par exemple la famille des ensembles $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ et $\{0, 1, -1, 3, -3\}$, on dit que c'est un «tournesol» si l'intersection de deux quelconques de ses membres est toujours la même. C'est le cas dans notre exemple, puisque:

$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$;
$\{1, 2, 3\} \cap \{0, 1, -1, 3, -3\} = \{1, 3\}$;
$\{1, 3, 5, 7\} \cap \{0, 1, -1, 3, -3\} = \{1, 3\}$.

La partie retrouvée dans chaque intersection se nomme le «cœur» du tournesol, et les ensembles ses «pétales». Il est important de noter que le cœur d'un tournesol peut être vide.



Un tournesol mathématique est une famille d'ensembles dont l'intersection deux à deux est toujours la même.

En 1960, Paul Erdös et Richard Rado démontrèrent que toute famille d'ensembles assez grande contient une sous-famille qui est un tournesol. Leur résultat donne des détails sur la taille du tournesol inévitable: pour tout couple d'entiers (k, r), si une famille d'ensembles F comporte $k!(r-1)^k$ ensembles ou plus, chacun comportant k éléments ou moins, alors il existe un tournesol pris dans F comportant r pétales ou plus.

Avec $k=3$ et $r=5$, on obtient donc que, dans toute famille de $3! \times 4^3 = 384$ ensembles ayant chacun trois éléments ou moins, on trouvera un tournesol d'au moins cinq pétales.

On note $f(k,r)$ la plus petite taille de la famille d'ensembles F garantissant que le résultat ci-dessus soit vrai. Le résultat de Paul Erdös et Richard Rado assure que $f(k,r) \leq k!(r-1)^k$. Bien sûr, quand une famille est trop petite, il se peut qu'elle ne contienne pas de tournesol: on sait par exemple qu'il existe de telles familles constituées de $(r-1)^k$ ensembles comportant chacun k éléments ou moins. Comme à son habitude, Paul Erdös proposa une conjecture: il lui semblait vraisemblable que, pour chaque entier r, il existe une constante C ne dépendant que de r telle que $f(k,r) \leq C^k$.

À la suite d'une série de progrès à partir de 2021, divers chercheurs dont Anup Rao, professeur à l'université de Washington, aux États-Unis, démontrèrent que $f(k,r) \leq C^k$, avec $C = c \times r \times \log_2(r \times k)$, pour c une constante. C'est beaucoup mieux que le résultat démontré par Paul Erdös et Richard Rado, mais cela ne démontre pas encore la conjecture puisque le C proposé dépend à la fois de r et de k. On avance, mais, comme dans le cas des polygones convexes, la conjecture ne tombe toujours pas.

On le voit dans ce domaine plus que dans bien d'autres: les conjectures que personne n'arrive à démontrer sont nombreuses. Elles constituent une puissante motivation pour les chercheurs, qui les a conduits à des progrès réguliers et importants dont la dernière décennie a été particulièrement féconde. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Scheucher, A SAT attack on Erdös-Szekeres numbers in R^d and the empty hexagon theorem, *Computing in Geometry and Topology*, 2023.

V. Jungić, The never-ending happiness of Paul Erdös's mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, 2023.

A. Rao, Sunflowers : From soil to oil, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2023.

A. Holmsen *et al.*, Two extensions of the Erdös-Szekeres problem, *Journal of the European Mathematical Society*, 2020.

D. Eppstein, *Forbidden Configurations in Discrete Geometry*, Cambridge University Press, 2018.

A. Suk, On the Erdös-Szekeres convex polygon problem, *Journal of the American Mathematical Society*, 2017.

T. Bisztriczky et G. Fejes Tóth, A generalization of the Erdös-Szekeres convex n-gon theorem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1989.

P. Erdös et G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica*, 1935.