RENDEZ-VOUS

STRATÉGIES POUR LE JEU DE HEX INFINI

Dans le jeu de Hex, il est prouvé qu'existe toujours une stratégie gagnante… À condition de s'en tenir à un plateau fini. Des résultats récents, plus surprenants, explorent la version infinie du jeu.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Le poète et physicien danois Piet Hein a créé divers casse-tête, dont le célèbre « cube Soma », mais les mathématiciens lui sont surtout reconnaissants pour le jeu de Hex, qu'il inventa en 1942. Ils le préfèrent parfois au jeu d'échecs, car ses règles sont plus simples et conduisent à de nombreux résultats élégants. Sa version de base se joue sur un tableau fini appelé « tablier », composé de cases hexagonales adjacentes formant un losange de n cases par côté. Pour les dimensions au-delà de $n = 9$, on cherche encore à déterminer la stratégie gagnante, dont on sait qu'elle existe pour le joueur qui commence grâce aux travaux du mathématicien et lauréat du prix Nobel d'économie John Nash.

Il faut noter que le jeu de Hex se prête vraiment à l'étude mathématique et que de nombreux articles scientifiques ainsi que plusieurs thèses lui ont été consacrés. On l'utilise aussi auprès d'élèves et d'étudiants pour leur faire découvrir les stratégies gagnantes sur les petits tabliers, ce qui est un exercice de raisonnement à la fois amusant et formateur.

Comme c'est le cas pour le jeu d'échecs et pour le jeu de dames, une version infinie du jeu de Hex a été proposée. L'analyse mathématique de cette variante vient d'être faite par les logiciens Joel Hamkins, de l'université Notre-Dame, dans l'Indiana, et Davide Leonessi, de l'école doctorale de l'université de la ville de New York. Il en résulte que chacun des joueurs, s'il joue correctement, est assuré de ne pas perdre, ce qui signifie que si les deux joueurs jouent correctement, toute partie aboutit à un match nul. C'est ce résultat que nous allons présenter.

Commençons par rappeler quelques éléments concernant le jeu de Hex dans sa version finie usuelle, telle qu'elle fut développée par Piet Hein et redécouverte par John Nash quelques années plus tard.

Il y a deux joueurs : celui qui commence, qui pour nous disposera des pions rouges, et son adversaire, qui prendra les pions bleus. Chacun à leur tour, ils mettent un pion sur le tablier aux cases hexagonales. Les pions doivent être posés sur des cases vides, et une fois en place ils ne bougent plus. Deux côtés diamétralement opposés du tablier sont marqués en rouge, et les deux autres en bleu. Le but du joueur rouge est de joindre les côtés marqués en rouge par une suite de cases adjacentes contenant des pions rouges, le joueur bleu tentant pour sa part de joindre les côtés bleus par des cases adjacentes où il aura placé des pions bleus.

STRATÉGIE GAGNANTE

Puisque le tablier est fini et se remplit petit à petit, la partie a nécessairement une durée finie, au plus égale au nombre de cases du tablier. Ce qui rend le jeu intéressant, c'est qu'on démontre que, quand un tablier est complètement couvert de pions rouges et bleus, même en nombre inégal, alors nécessairement l'un des joueurs a gagné, car soit un chemin rouge reliera les côtés rouges, soit un chemin bleu relira les côtés bleus (*voir l'encadré 1*). Le fait qu'il ne puisse y avoir simultanément un chemin

Jean-Paul Delahaye a également publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

gagnant pour le joueur rouge et un chemin gagnant pour le joueur bleu est intuitivement évident, car ces deux chemins, s'ils existaient, devraient se croiser, ce qui est impossible puisque chacun d'eux a une épaisseur strictement positive. Il résulte de tout cela qu'aucune partie n'est nulle: au plus tard quand le tablier sera entièrement rempli de pions, l'un des joueurs aura réussi la jonction entre les côtés du losange qui lui sont attribués.

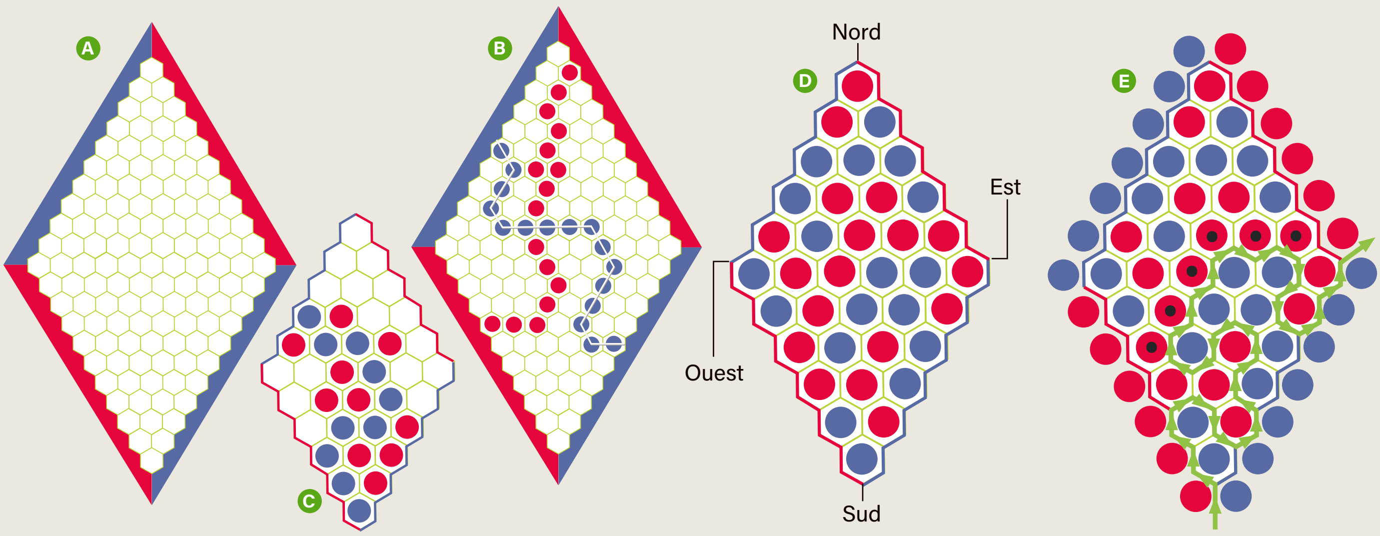
Pour les jeux à deux joueurs où le hasard n'intervient pas, où toute l'information est disponible à tout instant à chacun et où aucune partie nulle n'est possible, on possède depuis 1913 un théorème remarquable dû à Ernst Zermelo. Il indique que l'un des joueurs peut user d'une stratégie gagnante: l'adversaire de celui qui en dispose ne peut pas l'empêcher de gagner. Dans le cas d'un tablier infini, on verra plus loin qu'il n'est plus vrai que l'un des joueurs atteint nécessairement son but: dans ce cas, on ne pourra pas faire appel au théorème de Zermelo pour affirmer que l'un des joueurs peut avoir recours à une stratégie gagnante. Cela n'est pas impossible, mais la démonstration exigerait des arguments spécifiques.

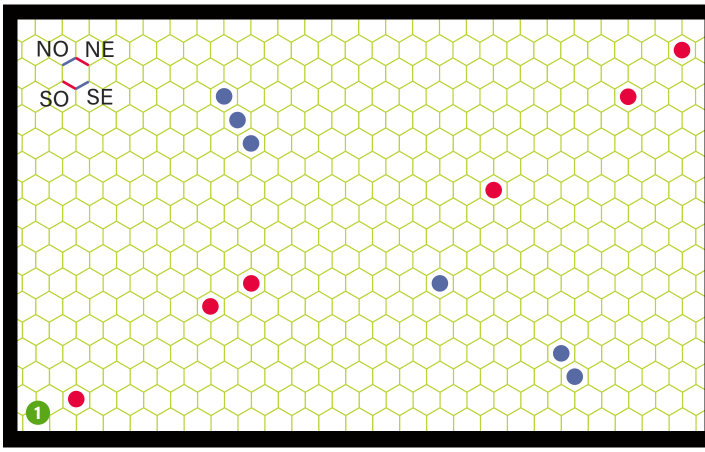
Un astucieux raisonnement proposé par John Nash montre que, dans le cas d'un tablier fini, c'est le joueur qui commence – pour nous, celui qui a les pions rouges – qui dispose de la stratégie gagnante, et, cela, quelle que soit la taille n du tablier. Le raisonnement de Nash consiste à supposer que le joueur bleu peut avoir la stratégie gagnante et à la transformer en une stratégie gagnante pour le joueur rouge – on parle de «vol de stratégie». Autrement dit, si le joueur bleu – celui qui joue en second – bénéficiait d'une stratégie gagnante, alors le joueur rouge en aurait une aussi, ce qui est impossible. La conclusion sera que le joueur bleu n'a pas de stratégie gagnante, et donc (puisque l'un des joueurs en a une, d'après le théorème de Zermelo) qu'il en existe une pour le joueur rouge.

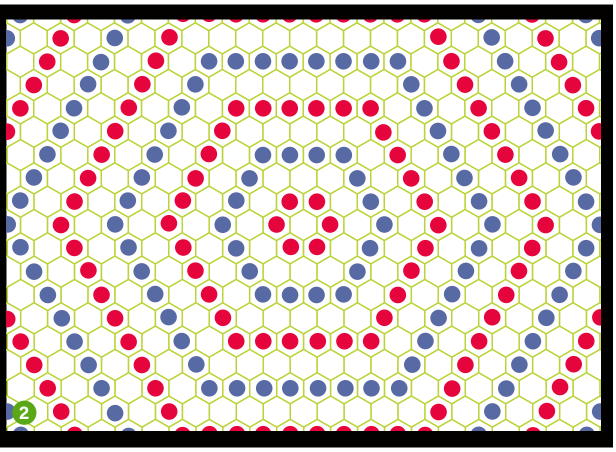
JEU DE HEX ET STRATÉGIE GAGNANTE

1

Sur un plateau de jeu appelé « tablier » à cases hexagonales, le joueur rouge pose des pions rouges et le joueur bleu, des pions bleus. Le rouge commence et cherche à créer un chemin rouge entre les côtés marqués de sa couleur, alors que le bleu s'efforce de joindre les côtés marqués en bleu *(voir le dessin A)*. Il est impossible d'avoir un croisement entre un chemin gagnant pour le joueur bleu et un chemin gagnant pour le rouge *(voir le dessin B)*.
La partie représentée sur le dessin *C* se conclut par la victoire du joueur bleu. L'américain John Pierce a proposé un remarquable argument pour démontrer qu'un tablier en forme de losange rempli de cases rouges ou bleues contient obligatoirement un chemin joignant les deux côtés bleus ou un chemin joignant les deux côtés rouges – ce qui a pour conséquence qu'une partie de Hex sur un tablier fini ne peut pas aboutir à un match nul.
On place le long de chacun des bords du tablier, à l'extérieur, une rangée de pions, en respectant les couleurs des bords *(voir les dessins D et E)*. On considère alors un chemin qui suit les bords des cases hexagonales en partant du coin sud du tablier, et tel que le chemin soit composé uniquement de segments ayant d'un côté un pion rouge et de l'autre un pion bleu. Ce chemin, dessiné en vert sur le dessin *E*, est déterminé de façon unique, puisque quand on en a tracé quelques segments, alors le dernier segment est entouré d'un pion rouge d'un côté, d'un bleu de l'autre, et qu'au bout du segment il y a un pion dont la couleur détermine si le segment à ajouter ira à droite ou à gauche. Le chemin ne peut pas repasser par un sommet qu'il a déjà emprunté, car le segment qu'il n'a pas pris (parmi les trois qui aboutissent au sommet) est entouré par deux pions de la même couleur. Le chemin résultant parvient donc nécessairement, au bout d'un parcours plus ou moins long, à l'un des coins nord, ouest ou est, les seuls endroits de la frontière par où le chemin peut sortir. On en déduit un chemin gagnant pour l'un des joueurs en suivant les cases adjacentes d'un côté ou de l'autre du chemin.



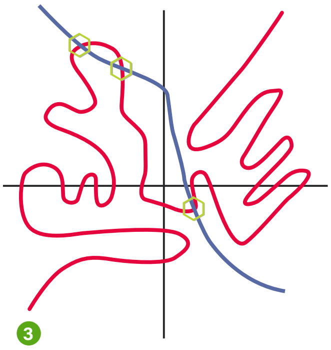




1 Tablier de jeu de Hex infini. On désigne les directions par les points cardinaux.

2 Configuration donnant un match nul, dans la version infinie du jeu de Hex.

3 Dans le jeu de Hex infini, le joueur rouge cherche à joindre le coin sud-ouest au coin nord-est par un chemin continu rouge, et le joueur bleu cherche à joindre le coin nord-ouest au coin sud-est par un chemin continu bleu.


3

La belle démonstration de Nash, qui s'adapte à la variante infinie du jeu pour établir que le joueur bleu ne peut pas disposer d'une stratégie gagnante, est la suivante: raisonnons par l'absurde et supposons que le joueur bleu puisse employer une stratégie gagnante. Le joueur rouge, après avoir joué un premier coup n'importe où, va, à chaque fois qu'il doit jouer, appliquer si c'est possible la stratégie gagnante du joueur bleu, en imaginant que les couleurs des pions sont interverties. Parfois, cela ne sera pas réalisable, car la case que cette méthode de jeu lui indique de jouer sera occupée par un de ses propres pions rouges (par exemple celui qu'il a posé au tout début): il jouera alors n'importe où, ce qui le conduira peut-être plus tard encore à jouer au hasard. Cette façon de procéder le fait nécessairement gagner, car quand il n'a pas strictement mis en place la stratégie gagnante, c'est que la case où il devait jouer était déjà prise par un de ses pions et, donc, que sa position était au moins aussi forte que celle qu'il aurait eue en plaçant son pion sur cette case. Cette manière d'agir pour le joueur rouge le fera peut-être gagner un peu plus tôt que prévu, grâce aux pions posés au hasard, mais puisque la stratégie qu'il copie est gagnante de manière certaine, elle le fera nécessairement joindre les deux bords rouges, donc il l'emportera. On aboutit ainsi à une contradiction, puisque les deux joueurs ne peuvent pas disposer simultanément d'une stratégie gagnante. Par conséquent, l'hypothèse de départ, selon laquelle le joueur bleu a une stratégie gagnante, est erronée, et c'est bien le joueur rouge qui en a une.

NON CONSTRUCTIF

Malheureusement, le raisonnement de Nash est non constructif: il prouve, dans le cas fini, que le joueur rouge dispose d'une stratégie gagnante quelle que soit la taille du tablier, mais il ne la fournit pas de manière explicite! On a pu la formuler pour les tabliers de taille inférieure ou égale à $n=9$, mais on ne sait pas déterminer la stratégie gagnante pour des tabliers plus grands, car la combinatoire des parties est trop complexe, même pour nos puissants ordinateurs. Des méthodes d'apprentissage profond sont mises en œuvre pour faire progresser les machines. Cependant, même quand elles gagnent contre les meilleurs humains, elles produisent des stratégies qui ne semblent pas être celles optimales dont le théorème de Zermelo indique l'existence, et que le raisonnement de Nash attribue au joueur rouge.

Pour avoir une bonne idée du jeu, essayez d'en faire quelques parties sur un tablier de petite taille. Vous découvrirez que, pour le tablier 3×3, le joueur qui commence gagne immédiatement en jouant la case centrale. Pour le tablier 4×4, le joueur qui commence gagnera facilement en occupant en premier l'une des 4 cases de la ligne de quatre hexagones qui dessine la petite diagonale du losange du tablier. S'il joue ailleurs, en revanche, son adversaire est certain de gagner en jouant ensuite comme il faut. Pour le tablier 5×5, à nouveau, le joueur qui commence gagnera toujours s'il joue la case centrale.

Quand on joue sur le tablier de Hex de 11×11, la taille de l'arbre de toutes les parties possibles est d'environ 10^{98}, ce qui est considérable! C'est cependant un peu moins que pour le jeu d'échecs, où la taille de l'arbre est évaluée à 10^{120}.

Lorsqu'on joue à «qui perd gagne» (le joueur qui crée un chemin joignant les deux côtés qui lui sont attribués perd la partie), Robert Winder, alors étudiant à l'université Princeton, a démontré, dans les années 1950, que le joueur rouge dispose d'une stratégie gagnante si la taille n du tablier est paire, et que c'est le bleu qui en a une si n est impair. La démonstration de ce résultat est présentée dans l'excellent livre d'Yves Dutrieux et Hervé Gianella intitulé *Jeux, casse-têtes et mathématiques* (Cassini, 2022).

Le jeu de Hex infini se pratique sur un pavage du plan infini. Comme dans la version finie, le joueur ayant les pions rouges commence, et les joueurs posent alternativement un de leurs pions sur une case inoccupée, où il reste définitivement. Le jeu se poursuit indéfiniment. Voir le dessin 1 (*page ci-contre*).

LE JEU DE HEX INFINI

Le but du joueur rouge est de tracer un chemin entre (-∞,-∞) (c'est-à-dire la direction sud-ouest) et (+∞,+∞) (le nord-est). Le joueur bleu, quant à lui, cherche à joindre (-∞,+∞) (le nord-ouest) et (+∞,-∞) (le sud-est). Voir le dessin 3.

Pour être un peu plus précis, cela signifie que le joueur rouge doit construire un chemin «doublement infini» de cases adjacentes toutes différentes occupées par ses pions: ..., C_{-n}, C_{-n+1}, ..., C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n, ... et ceci de sorte que les deux coordonnées de la case C_i tendent vers +∞ quand i tend vers +∞, et que les deux coordonnées de C_i tendent vers -∞ quand i tend vers -∞. Pour le joueur bleu, l'abscisse de C_i doit tendre vers -∞ et son ordonnée vers +∞ quand i tend vers -∞, et c'est l'inverse quand i tend vers +∞. On remarquera que la condition énoncée ne dépend pas de l'origine choisie sur le plan pour déterminer les coordonnées des cases d'un chemin.

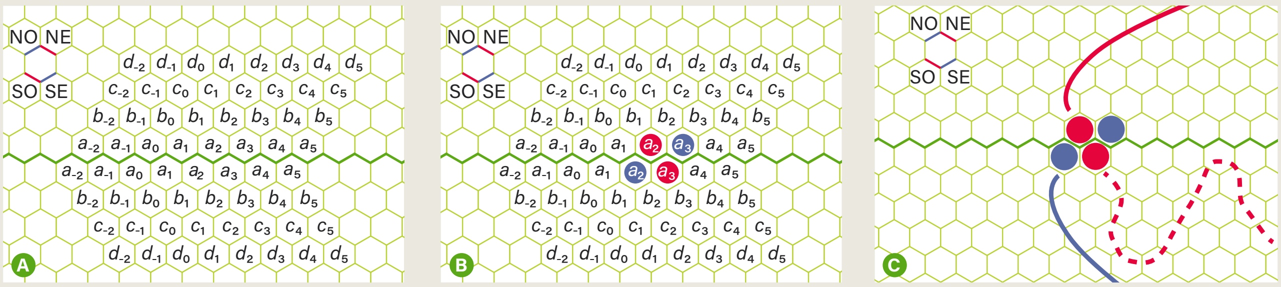
Comme pour le jeu sur un tablier fini, les joueurs ne peuvent pas réussir tous les deux ce qui leur est demandé, car une telle situation doublement gagnante obligerait le chemin infini gagnant du joueur rouge à croiser le chemin infini gagnant du joueur bleu – ce qui est irréalisable, car les chemins ont chacun une certaine épaisseur. Le résultat est géométriquement évident, mais bien sûr des arguments mathématiques parfaitement précis établissent cette impossibilité d'un double gagnant. Une partie infinie débouche donc (à l'infini!) soit par la victoire d'un des deux joueurs, soit par un match nul s'ils se sont mutuellement bloqués. Le dessin 2 montre que ce dernier cas est possible. Cela prouve qu'on ne peut pas adapter le raisonnement utilisé dans le cas fini pour démontrer l'impossibilité d'un nul.

Il faut bien noter que pour le jeu infini, c'est seulement une fois tous les coups joués qu'on sait s'il y a un gagnant, et qui a gagné. Bien évidemment cela n'est pas faisable en pratique, mais pour un mathématicien, imaginer se placer en un instant au-delà de tous les instants finis possède un sens clair, comme quand on considère une suite numérique et qu'on en détermine la limite.

Le raisonnement utilisant le vol de stratégie qui, dans le cas fini, établit que le joueur bleu ne peut pas disposer d'une stratégie gagnante (*voir l'encadré 2*) s'applique à nouveau, et établit que s'il y a une stratégie gagnante pour l'un des joueurs, cela ne peut être que pour le joueur rouge, qui commence. Cependant, un remarquable raisonnement montre que, contrairement au cas fini, le premier joueur ne bénéficie pas d'une telle stratégie gagnante, car le second joueur, en s'y prenant bien, pourrait l'entraver

2 INÉVITABLES PARTIES NULLES DANS LE CAS INFINI

Pour établir qu'aucun joueur ne peut être certain de gagner dans le cas infini, on commence comme pour le cas fini par considérer la méthode de vol de stratégie que le joueur rouge, qui entame la partie, pourrait appliquer si le joueur bleu disposait d'une stratégie gagnante.
La méthode fonctionne et prouve que, s'il y a une stratégie gagnante, cela ne peut être que pour le joueur rouge.
Par ailleurs, quelle que soit la stratégie du joueur rouge, le joueur bleu peut l'empêcher de gagner. Pour cela, le joueur bleu choisit, au début de la partie, une ligne cassée verte horizontale *(voir le dessin A)*, et apparie les cases en dessous de la ligne verte et les cases au-dessus de la ligne verte comme c'est indiqué.
Remarquez qu'il s'agit d'un appariement symétrique dans lequel on a fait faire un léger décalage vers la droite à la partie au-dessus de la ligne verte ; il concerne donc toutes les cases du plan infini.
Le joueur bleu va toujours placer un pion dans la case associée à celle où le joueur rouge a posé le sien. Ce sera toujours faisable, car le joueur rouge ne peut pas jouer simultanément deux cases associées. Ce procédé permet au joueur bleu d'empêcher le joueur rouge de gagner. Ce n'est pas totalement évident : un chemin pour le joueur rouge semble possible, puisqu'il se peut que le chemin du joueur rouge traverse la ligne verte, sans que celui du joueur bleu la traverse *(voir le dessin B)* ! Il semble donc envisageable que le joueur rouge crée un chemin infini allant vers le nord-est en +∞ et vers le sud-ouest en -∞. En réalité cela n'est pas concevable pour une raison topologique. En effet, si un chemin rouge va vers le nord-est, alors le chemin « symétrique » bleu mis en place en jouant selon la stratégie décrite ira vers le sud-est, ce qui rend impossible que le chemin rouge aille en -∞ vers le sud-ouest comme il le faudrait *(voir le dessin C)*.
Le joueur bleu dispose donc d'une stratégie de jeu qui empêche le joueur rouge de gagner, quoi que ce dernier fasse : le joueur rouge ne peut pas avoir de stratégie gagnante. Mais comme le joueur bleu ne peut pas en avoir, d'après l'argument du vol de stratégie de John Nash, aucun des joueurs ne peut en appliquer une. Ainsi, si les deux joueurs jouent correctement, toute partie sera nulle.
Le raisonnement s'applique même si on considère des parties qui se prolongent au-delà de l'infini en permettant aux joueurs après une première série infinie d'échanges d'en faire une deuxième, et même une troisième ou plus encore.



3 UNE BLAGUE DE CLAUDE SHANNON

Rapidement après son invention, le jeu de Hex circula à la fois en Europe et aux États-Unis, tout particulièrement durant la décennie 1950. Claude Shannon, de l'institut de technologie du Massachusetts (MIT), à Cambridge, s'y intéressa de près. Avec son équipe, il réalisa plusieurs machines qui y jouaient. L'une d'elles lui servit à faire une farce à ses collègues. Pour en comprendre la nature, il faut d'abord savoir que, pour un tablier de taille $n \times (n-1)$, il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui doit relier les deux bords les plus proches, et cela qu'il joue en premier ou en second. La stratégie est assez simple : elle consiste à jouer la case de même nom que celle que vient de jouer l'adversaire dans le dessin ci-contre. Le schéma est donné pour la taille 6 × 7, mais se généralise facilement à toutes les tailles $n \times (n-1)$. Shannon programma une machine pour qu'elle joue en second sur un tablier de taille 7 × 8 en appliquant la stratégie gagnante. Pour éviter d'engendrer des soupçons, il fit en sorte que la machine ne joue pas trop vite. Surtout, il déforma légèrement les cases pour que l'allure générale du tablier soit celle d'un parallélogramme à côtés égaux. Les joueurs à qui il proposait d'essayer sa machine étaient invités à commencer la partie. Ils savaient que celui qui joue en premier quand le tablier est de la forme $n \times n$ doit gagner, et ils croyaient jouer sur un tel tablier… et, pourtant, à leur grand étonnement, ils perdaient toujours contre la machine !

et donc empêcher le premier joueur de gagner (*voir l'encadré 2*). Il en résulte que, si les deux joueurs jouent correctement, la partie est toujours nulle.

AU-DELÀ DE L'INFINI

Jusqu'ici, pour nous, « jouer une partie infinie » a signifié jouer un coup n° 0, un coup n° 1, et un coup pour chaque nombre entier n. Un mathématicien peut imaginer aller plus loin ! Une fois tous les coups correspondant aux nombres entiers joués (dont il faut noter qu'ils n'ont pas nécessairement rempli le tablier infini), on peut convenir que la partie reprend. On fixera par exemple que c'est le rouge qui entame les hostilités pour la deuxième série infinie, mais on peut fixer aussi que c'est le bleu – il faut donc compléter les règles du jeu pour préciser ce point. La première version infinie du jeu de Hex correspond à ce qu'on appelle l'« ordinal ω », à la suite du mathématicien allemand Georg Cantor. La seconde version avec recommencement pour une deuxième série infinie de coups correspond, elle, à l'ordinal $\omega+\omega$, qu'on note par convention $\omega.2$. On dira qu'on a un jeu infini de type $\omega.2$.

Une fois la deuxième série de coups jouée, rien ne nous empêche de poursuivre pour une troisième série, pourvu qu'on ait à nouveau fixé une règle pour déterminer le joueur qui relance le combat. Cela correspondra à un jeu infini de type $\omega.3$. Et ainsi de suite. Si, pour chaque entier n, la partie reprend après le jeu de type $\omega.n$, on dira qu'on a affaire à un jeu de type ω^2. Et l'on peut continuer, encore et encore. Pour le jeu de Hex, les versions prolongées ne donnent jamais rien de vraiment nouveau, et les démonstrations pour le jeu infini de base s'adaptent et conduisent à la conclusion que les jeux infinis de Hex de type $\omega.2$, $\omega.3$, …, ω^2 etc. se solderont toujours par des parties nulles si les deux joueurs jouent correctement, et peu importent pour cela les conventions relatives aux joueurs qui reprennent les hostilités après les séquences infinies de coups.

Joel Hamkins et Davide Leonessi, qui ont découvert et prouvé le résultat concernant les parties nulles du jeu de Hex infini, formulent une conjecture intéressante et pour l'instant sans démonstration : « Quelle que soit la position initiale d'un nombre fini de pions sur le tablier infini, aucun des deux joueurs ne dispose de stratégie gagnante. Ainsi, toutes les parties commençant par quelques pions posés sur le tablier se terminent par un match nul si les joueurs jouent correctement, et cela reste vrai pour les jeux infinis de type $\omega.2$, $\omega.3$, …, ω^2, …, ω^k etc. »

Puisque les parties infinies de Hex sont désespérément nulles quand des joueurs compétents s'affrontent, ne peut-on pas donner un avantage à l'un des joueurs pour qu'il l'emporte ? Si l'avantage est que le joueur rouge pose deux pions à chaque fois qu'il joue, tandis que le joueur bleu n'en place qu'un, alors une réponse positive a été démontrée : le joueur rouge, en jouant bien, est certain de gagner. En revanche, si c'est le joueur bleu qui pose deux pions à chaque coup et le joueur rouge un seul, on ne sait pas. Certaines questions simples restent irrésolues :

(a) Lorsque la position de départ est une ligne infinie horizontale de pions rouges, le joueur rouge dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?

(b) Même question avec une ligne de pions rouges ayant une pente négative.

(c) Même question avec un quart de plan de pions rouges au nord-ouest (un ensemble de pions dont les coordonnées x et y vérifient $x < a$ et $y > b$, pour a et b deux entiers) et un quart de pions rouges au sud-est (un ensemble de pions dont les coordonnées x et y vérifient $x > a'$ et $y < b'$, pour a' et b' deux entiers). ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Hamkins et D. Leonessi, Infinite Hex is a draw, *arXiv preprint*, 2022.

J. Hamkins et D. Leonessi, Transfinite game values in infinite draughts, *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 2022.

D. Leonessi, Transfinite game values in infinite games, *arXiv preprint*, 2021.

T. Cazenave *et al.*, Polygames : Improved zero learning, *ICGA Journal*, 2020.

R. Hayward et B. Toft, *Hex : The full story*, CRC Press, 2019.

J. Lagarias et D. Sleator, *Who wins misère Hex ?* in E. Berlekamp, T. Rodgers (Eds.), *The Mathemagician and Pied Puzzler: A Collection in Tribute to Martin Gardner*, A. K. Peters, 1999.

D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem, *The American Mathematical Monthly*, 1979.

J. Nash, Some games and machines for playing them, *Technical Report D-1164*, Rand Corporation, 1952.