

# R

## ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul  
 P.86 Art & science  
 P.88 Idées de physique  
 P.92 Chroniques de l'évolution  
 P.96 Science & gastronomie  
 P.98 À picorer

# L'INFINIE FINESSE DES FRACTALES CARRÉES

Les fractales carrées présentent une variété de topologies qu'on réussit seulement maintenant à comprendre et à classer.

### L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
 professeur émérite  
 à l'université de Lille  
 et chercheur au  
 laboratoire Cristal  
 (Centre de recherche  
 en informatique, signal  
 et automatique de Lille)

Remerciements à  
 Jean-François Colonna  
 (CMAP de l'École  
 polytechnique), qui a  
 réalisé les illustrations  
 de cet article.



Jean-Paul Delahaye  
 a notamment publié :  
**Au-delà du Bitcoin**  
 (Dunod, 2022).

**L**e tapis de Sierpiński est l'une des plus élémentaires figures fractales. Il a été présenté à l'Académie des sciences de Paris à la séance du 25 avril 1916 par Émile Picard, qui parlait pour le mathématicien polonais Waclaw Sierpiński. Une note de ce dernier a ensuite été publiée dans les comptes rendus de l'Académie, dans laquelle le savant définit ainsi ce qu'on appelle maintenant «le tapis de Sierpiński» : «Soit  $Q$  un carré donné, par exemple le carré dont les sommets sont les points  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  et  $(1,1)$ . Divisons le carré  $Q$  en neuf carrés plus petits et excluons l'intérieur de celui qui contient le centre du carré  $Q$ . Sur chacun des huit carrés qui resteront opérons de même, et ainsi de suite *ad infinitum*.» Nous noterons  $S_0$  le carré initial (que Sierpiński, lui, note  $Q$ ), puis  $S_1$ ,  $S_2$ , etc., les étapes de la construction, conduisant à l'infini au tapis  $S$  (voir l'encadré 1).

La fractale  $S$  est autosimilaire : chacune des huit parties qui composent  $S$  est une version trois fois plus petite et parfaitement similaire à  $S$ . Il faut noter que toutes les fractales n'ont pas cette propriété : le célèbre ensemble de Mandelbrot, par exemple, n'est pas parfaitement autosimilaire.

La fractale  $S$  est par ailleurs infiniment mince, ce qui signifie deux choses :

(a) On ne peut placer à l'intérieur de  $S$  aucun disque de rayon non nul ;

(b) L'aire de  $S$  est nulle, c'est-à-dire que  $S$  peut être enfermée dans des sous-ensembles du plan d'aires  $\epsilon$ , avec  $\epsilon > 0$  aussi petit qu'on le veut.

Cette dernière propriété résulte de ce que l'aire de  $S_0$  est 1, puis qu'à chaque étape de la construction, cette aire est multipliée par  $8/9$ . Donc l'aire de  $S_n$  (qui contient  $S$ ) vaut  $(8/9)^n$ , nombre qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Bien qu'infiniment mince, le tapis de Sierpiński  $S$  est un sous-ensemble infini non dénombrable du plan : même si c'est étonnant, il contient exactement autant de points que le carré de départ  $S_0$ . La démonstration est élémentaire :  $S$  est contenu dans le carré de départ, donc il contient un nombre de points inférieur ou égal à celui de  $S_0$ . Par ailleurs,  $S$  contient au moins autant de points que le segment reliant le point de coordonnées  $(0,0)$  au point de coordonnées  $(1,0)$ , car aucun point de ce segment n'est jamais retiré dans la construction. Or on sait qu'un segment contient une infinité de points équivalente à celle d'un carré plein (c'est un résultat dû à Georg Cantor). Donc  $S$  contient au moins autant de points que le carré plein. Autrement dit, le carré plein, l'ensemble  $S$  et le segment reliant les points de coordonnées  $(0,0)$  et  $(1,0)$  ont tous un nombre de points égal – qui vaut l'infini du continu.

### DIMENSION FRACTALE

La dimension fractale de  $S$  est  $\log(8)/\log(3) \approx 1,8927$ , ce qui signifie qu'il est «plus gros» qu'une ligne ou une courbe (de dimension 1) mais «moins gros» qu'une partie du plan de surface non nulle (donc de dimension 2). Il existe plusieurs façons de calculer cette dimension, mais toutes donnent le même

résultat. La notion de dimension fractale est assez naturelle: soit  $S_0$  un carré plein de côté 1, pour tout entier  $k > 1$ , il se divise en  $k^2$  carrés identiques de côté  $1/k$ . Un segment de droite de longueur 1 se divise, lui, en  $k^1$  segments de droite de longueur  $1/k$ . L'exposant qui apparaît dans le nombre d'objets qu'on obtient quand on divise un objet en objets similaires de taille  $k$  fois plus petite indique la dimension de l'objet: 2 pour le carré plein, 1 pour le segment de droite. Dans le cas du tapis de Sierpiński, on a noté qu'il se divise en 8 objets de taille 3 fois plus petite, et donc aussi en 64 objets de taille 9 fois plus petite, etc. Si on doit lui attribuer une dimension, ce serait donc l'exposant  $e$  tel que  $3^e = 8$ ,  $9^e = 64$ , etc. Cela donne  $\log(3^e) = \log(8)$ , donc  $e \times \log(3) = \log(8)$ ;  $e = \log(8) / \log(3)$ . On vérifie aussi que le même  $e$  donne  $9^e = 64$ , etc. Il est donc naturel d'attribuer la dimension  $\log(8) / \log(3)$  au tapis de Sierpiński. D'autres approches confirment cette valeur. Que cette dimension ne soit pas un nombre entier justifie qu'on parle de «fractale».

Il existe des variantes de  $S$  en dimension 3 ou même plus, mais nous allons nous concentrer ici sur les variantes en dimension 2, qui constituent une collection d'objets fractals autosimilaires dont les propriétés topologiques ont été récemment l'objet de très fines études donnant naissance à un chapitre nouveau de la géométrie

fractale. Ce sera pour nous l'occasion de voyager dans les structures de l'infiniment fin, dont nous pourrions saisir la délicatesse et l'étrangeté.

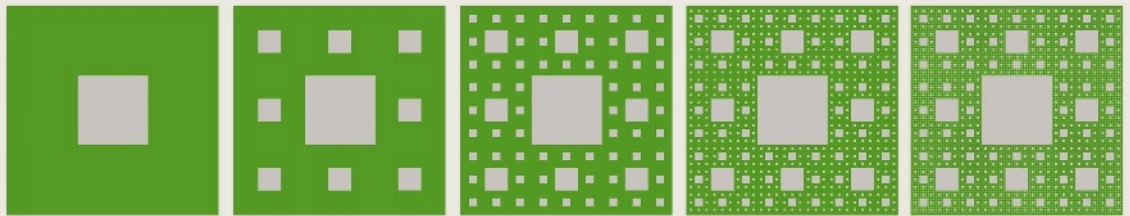
Le schéma général de construction qui a stimulé les mathématiciens est une généralisation immédiate de la construction de Sierpiński. Elle produit une infinité de variantes de  $S$ , appelées les «fractales carrées» (*fractal squares* en anglais).

Dans ce que nous nommerons «le procédé général de Sierpiński», on se donne un entier  $k \geq 2$ , et on divise le carré initial  $S_0$  en  $k^2$  petits carrés de même taille. On enlève certains de ces carrés, dont la liste  $E$  est fixée une fois pour toutes. On recommence la même opération sur les carrés restants, et on poursuit *ad infinitum*, comme l'écrivait Sierpiński. Les encadrés donnent des exemples, dont les plus connus sont la fractale de Vicsek, le T majuscule fractal et le L majuscule fractal.

Un petit carré obtenu après la division en  $k^2$  parties du carré de départ peut être repéré par le numéro de la ligne auquel il appartient – un nombre entier entre 0 et  $k-1$  – et le numéro de la colonne auquel il appartient – encore un nombre entier entre 0 et  $k-1$ . Ces deux entiers constituent les coordonnées du carré considéré. À chaque entier  $k \geq 2$  et à chaque sous-ensemble  $E$  de coordonnées correspond, par le procédé général de Sierpiński, un sous-ensemble du plan  $L(k, E)$ , qu'on écrira simplement  $L$  quand

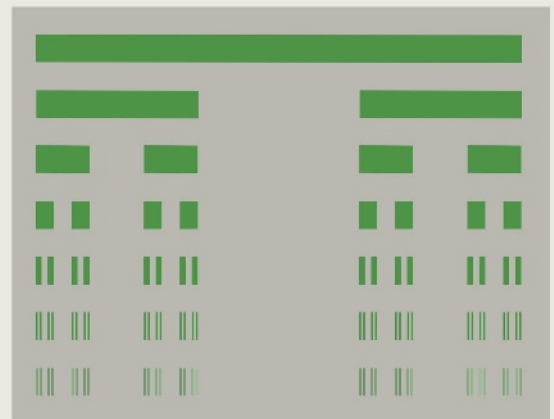
## LE TAPIS DE SIERPIŃSKI DE 1916

# 1



On part d'un carré plein construit autour des quatre points de coordonnées  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  et  $(0,1)$ . Le tapis de Sierpiński  $S$  est le résultat obtenu quand on retire l'intérieur du carré central du carré initial découpé en neuf carrés de même taille, puis qu'on recommence le même procédé sur chacun des huit petits carrés restants, et ainsi de suite à l'infini. Plus précisément, si l'on note  $S_0$  le carré initial, puis  $S_1, S_2$ , etc., les sous-ensembles successifs de la construction, le tapis de Sierpiński est la limite de la suite  $(S_n)$ , c'est-à-dire l'intersection de tous les  $S_n$ . Le tapis  $S$  est un ensemble infini non dénombrable: il peut être mis en bijection avec l'ensemble de nombres réels.

Les points d'ordonnée  $1/2$  de  $S$  ont pour abscisses les points de l'ensemble triadique  $C$  de Cantor (*représenté ci-contre*), découvert en 1874 par le mathématicien irlandais Henry Smith et étudié par le mathématicien allemand Georg Cantor en 1883. On l'obtient en retirant le tiers central du segment réel  $[0,1]$  et en répétant l'opération sur chacun des deux segments ainsi créés, et ainsi de suite indéfiniment. L'ensemble  $C$  est constitué des nombres réels entre 0 et 1 qui n'utilisent pas de 1 quand on les écrit en base 3.



# 2

## LE PROCÉDÉ GÉNÉRAL DE SIERPIŃSKI

Plutôt que de partir d'un carré divisé en neuf, on part d'un carré divisé en  $k^2$  plus petits carrés tous identiques. On se fixe un ensemble  $E$  de petits carrés qu'on retire parmi eux, et on recommence l'opération sur chacun des carrés restants. Pour identifier les carrés à enlever, on les numérote comme sur le dessin ci-contre. La limite des ensembles obtenus après un retrait de carrés, deux retraits, etc., est ce qu'on appelle une « fractale carrée ». La donnée de  $k$  et d'un ensemble  $E$  de coordonnées désignant les carrés à enlever détermine une fractale carrée.

(0,k-1)	(1,k-1)	(2,k-1)	...	(k-1,k-1)
...	...	...	...	...
(0,2)	(1,2)	(2,2)	...	(k-1, 2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	...	(k-1,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)	...	(k-1,0)

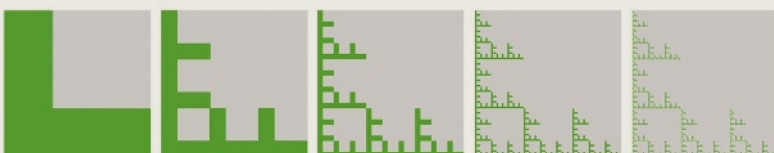
Si on prend  $k = 2$  et  $E = \{(0,1),(1,0)\}$ , les étapes de construction donnent simplement la diagonale du carré de départ. La fractale de Vicsek est quant à elle obtenue avec  $k = 3$  et  $E = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)\}$ . Le L majuscule fractal provient de  $k = 3$  et  $E = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$ . Le T majuscule fractal provient de  $k = 3$  et  $E = \{(0,0),(2,0),(1,0),(1,2)\}$ .



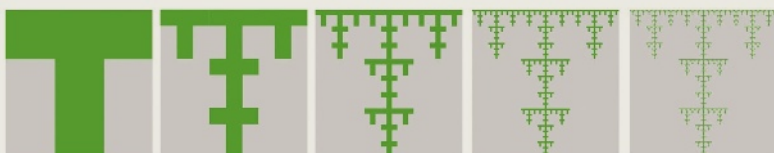
Le cas qui donne la diagonale



La fractale de Vicsek



Le L majuscule fractal



Le T majuscule fractal

le contexte sera assez clair. Sauf exception, ce  $L$  est une fractale. On notera  $L_n(k,E)$ , ou  $L_n$  quand le contexte est clair, la  $n$ -ième étape de la construction. Les fractales carrées sont tous les  $L$  qu'on obtient par ce procédé.

Le tapis de Sierpiński de 1916 est associé au choix  $k=3$  et  $E=\{(1,1)\}$ , car parmi les neuf carrés du découpage, on les garde tous sauf celui du centre, dont les coordonnées sont  $(1,1)$ . La fractale de Vicsek s'obtient quant à elle de

deux façons différentes, qui fournissent le même motif tourné de  $45^\circ$  :

(a)  $k=3$  et  $E=\{(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)\}$  (voir l'encadré 2) ;

(b)  $k=3$  et  $E=\{(1,0),(0,1),(2,1),(1,2)\}$  (voir l'encadré 4).

L'ensemble limite  $L$  sera souvent infiniment déchiqueté ou découpé, mais il y a quelques exceptions. Si, par exemple, on prend  $k=2$ ,  $E=\{(1,0),(0,1)\}$  (on ne garde que les deux carrés de coordonnées  $(0,0)$  et  $(1,1)$  après avoir découpé  $S_0$  en 4), la construction conduit à un simple segment de droite diagonal joignant les points de coordonnées  $(0,0)$  et  $(1,1)$  (voir l'encadré 2). Autre exemple ne conduisant pas à un ensemble déchiqueté : on n'enlève aucun carré,  $E=\emptyset$ . Dans ce cas, la construction en partant du carré  $S_0$  n'évolue pas et donne  $S_0$  lui-même à l'infini.

La dimension fractale des objets obtenus s'obtient facilement en généralisant le cas du tapis de Sierpiński ( $k=3, E=\{(1,1)\}$ ). Pour une fractale carrée obtenue à partir de  $k$  et de  $E$  contenant  $m$  éléments, la dimension fractale de la forme  $L$  obtenue est  $\log(k^2-m)/\log(k)$ . Cette dimension est inférieure à 1 si on enlève beaucoup de carrés à chaque étape (précisément, si on en laisse moins de  $k$ ), sinon elle est comprise entre 1 et 2.

### PLUSIEURS TOPOLOGIES INFINIES

Une série de travaux mathématiques récents menés par des chercheurs et chercheuses en Chine, en Russie et en Autriche ont permis de mieux comprendre ces structures infiniment découpées résultant du procédé général de construction de Sierpiński.

Le cas le plus simple, que nous appellerons le « cas classique », est celui où on n'obtient qu'une figure sans découpage infiniment fin, qui sera soit une droite, soit un rectangle. Les autres cas, où  $L$  est infiniment déchiqueté ou découpé, se rangent dans deux catégories principales, chacune se séparant à nouveau en plusieurs sous-catégories. Comprendre ces figures demande un petit effort, car bien sûr nous ne sommes pas habitués à penser ou imaginer des structures géométriques possédant des découpages infiniment fins. Il faut deviner ce qui se passe quand on descend dans leurs détails de plus en plus petits et nombreux. On ne voit qu'imparfaitement ces structures puisque, bien sûr, tout dessin qu'on tentera n'aura qu'une précision limitée. Cette exploration est une sorte de voyage mathématique dans les variantes de l'infiniment fin.

Les deux grandes catégories infiniment découpées sont le « cas connexe » et le « cas non connexe », que nous appellerons le « cas éclaté ». La distinction se fonde sur la possibilité ou non de passer continûment d'un point de  $L$  à tout autre point de  $L$ , sans quitter  $L$ . On est dans le

cas connexe lorsque la fractale  $L$  obtenue est d'un seul tenant: on peut joindre deux points quelconques de  $L$  en traçant un chemin – une courbe continue – qui reste dans  $L$ .

Un résultat simple et intéressant, démontré en 2010 par Ligia-Loreta Cristea et Bertran Steinsky, permet de reconnaître immédiatement cette situation:  $L$  est connexe si et seulement si chaque étape de la construction  $L_n$  est connexe (voir les encadrés 3 et 4). Plus précisément encore: soit  $L$  est connexe, soit il existe une étape  $n$  à partir de laquelle tous les  $L_p$  (pour  $p \geq n$ ) ne sont pas connexes, et alors  $L$  n'est pas connexe.

Dans le cas connexe, il peut y avoir ou non des «boucles internes». La situation «connexe avec existence de boucles» est celle du tapis de Sierpiński de 1916: il existe des chemins continus internes à  $L$  formant des boucles qui ne se recoupent pas. Autrement dit, partant d'un point de  $L$ , on peut suivre un chemin continu pour y revenir sans repasser deux fois par le même point. Dans cette classe des fractales connexes avec boucle interne, il y a aussi le « $L$  majuscule fractal» (voir l'encadré 2), le « $H$  majuscule fractal», le « $S$  couché fractal» et la «croix trouée fractale» (voir l'encadré 3).

### CONNEXES ET FRAGILES: LES DENDRITES

La seconde situation, dans le cas connexe, est celle où la fractale carrée ne présente pas la moindre boucle: il n'est jamais possible de partir d'un point et d'y revenir en suivant un chemin continu qui ne se recoupe pas. On parle alors de «dendrite». Ce vocabulaire est emprunté à la biologie: certaines cellules, dont les neurones, semblent posséder des excroissances qui présentent des fourches plusieurs fois de suite – mais, bien sûr, en biologie il n'y a qu'un nombre fini de telles séparations. Les branches des arbres sont, elles aussi, des dendrites finies. Pour nos fractales carrées, en revanche, quand des bifurcations se produisent, c'est une infinité de fois, et l'ensemble limite est donc une sorte d'arbre infini localisé dans un domaine borné (voir l'encadré 4).

Deux sortes de points composent une telle fractale carrée dendritique  $L$ : les «points extrêmes» et les «points séparateurs». Un point extrême est une extrémité de branche infinie: quand on le retire à  $L$ ,  $L$  reste connexe. C'est par exemple le cas des points de coordonnées  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  et  $(1/2,0)$  du  $T$  majuscule fractal (voir l'encadré 2). Ce ne sont pas les seuls points extrêmes, et on peut même montrer que dans le cas du  $T$  majuscule fractal, il y en a une infinité non dénombrable – c'est-à-dire autant que de réels.

Les points séparateurs des dendrites sont les autres points (par exemple le point de coordonnées  $(1/2,1)$  pour le  $T$  majuscule fractal).

Quand on retire un tel point, la fractale est «cassée»: elle cesse d'être connexe, car il devient impossible de joindre par un chemin continu certains couples de points.

Les sous-ensembles  $A$  du plan qui ne sont pas connexes se décomposent en sous-ensembles connexes aussi grands que possible, dont la réunion donne  $A$ , qu'on appelle les «composantes connexes de  $A$ ». Dans le cas du  $T$  majuscule fractal, enlever un point séparateur donnera un sous-ensemble du plan comportant deux ou trois composantes connexes. Enlever le point de coordonnées  $(1/2,1)$  sépare par exemple cette

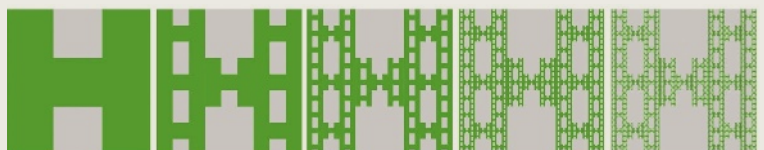
# 3

## FRACTALES CARRÉES CONNEXES AVEC BOUCLES

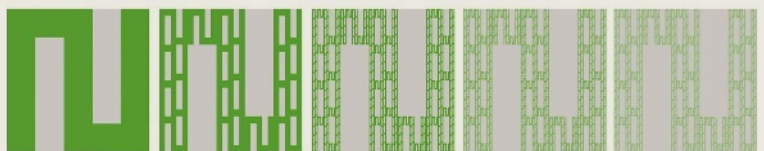
Les fractales carrées se classent en catégories qu'il est intéressant de bien comprendre. Lorsque tous les points d'une fractale carrée peuvent être joints les uns aux autres par des courbes continues, on dit que la fractale est d'un seul tenant, ou connexe. Elle peut alors contenir ou non des courbes continues bouclées.

Le tapis de Sierpiński de l'encadré 1 contient bien sûr de telles boucles, dont la plus grande est celle du périmètre du carré de départ. Le  $H$  majuscule fractal contient

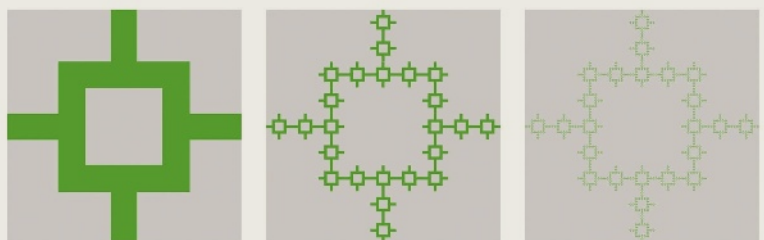
lui aussi des boucles, de même que le  $S$  couché fractal et la croix trouée fractale. Cependant, toute courbe fermée dans le  $S$  couché fractal ou la croix trouée fractale a une longueur infinie: une telle courbe est en effet contrainte de faire des détours à toutes les échelles, ce qui allonge son trajet sans limite! En revanche, il existe des boucles de longueur finie dans le  $H$  majuscule fractal ou le tapis de Sierpiński – en raison de l'existence, dans ces deux dernières fractales, de segments verticaux et horizontaux.



Le  $H$  majuscule fractal



Le  $S$  couché fractal



La croix trouée fractale

fractale en trois composantes connexes: la partie centrale qui descend jusqu'au point de coordonnées  $(1/2, 0)$ , une partie à droite composée d'un T fractal de taille  $1/3$  collé à un T fractal de taille  $1/9$ , et une partie à gauche symétrique à celle de droite.

Même si ce n'est pas tout à fait évident, il existe pour le T majuscule fractal des points qui, lorsqu'on les retire, donnent seulement deux composantes connexes. C'est le cas, par exemple, des points de coordonnées  $(1/3, 1)$  et  $(2/3, 1)$ , et plus généralement des points dont les coordonnées sont de la forme  $(k/3^n, 1)$  avec  $n$  un entier strictement positif et  $k$  un entier compris entre 1 et  $3^n - 1$ . Plus précisément, les points d'ordonnée  $y=1$  qui séparent le T majuscule fractal en trois composantes sont tous ceux dont l'abscisse est de la forme  $x=(1+2k)/(2 \times 3^n)$ , avec  $n$  un entier positif ou nul et  $(1+2k)$  un entier impair compris entre 1 et  $2 \times 3^n - 1$ . Tous les autres points (à l'exception des extrémités du segment) le séparent en deux.

La fractale de Vicsek (voir les encadrés 2 et 4) possède des points séparateurs qui le coupent en quatre composantes connexes. Cette fractale est très connue des physiciens, qui l'utilisent pour concevoir des antennes, et

aujourd'hui encore on étudie les propriétés des dispositifs physiques construits en se basant sur sa forme. La fractale de Vicsek contient aussi des points séparateurs qui donnent deux composantes connexes – par exemple, le point de coordonnées  $(1/2, 2/3)$  – mais n'en contient pas qui donnent trois composantes connexes.

Un résultat assez étonnant a été démontré en 2023 par Dmitry Drozdov et Andrei Tetenov: dans le cas d'une fractale carrée connexe, enlever un point peut maintenir la fractale d'un seul tenant (point extrême), peut la couper en deux, trois ou quatre composantes connexes, mais ne le coupera jamais en  $k$  composantes connexes pour  $k > 4$ .

Les fractales carrées dendrites se divisent en deux catégories bien nettes. Il y a celles (comme la fractale de Vicsek) qui contiennent des segments et celles qui n'en contiennent pas – dont par exemple le Taureau fractal et le Loch Ness fractal (voir l'encadré 4). Dans le premier cas, joindre deux points extrêmes se fait en empruntant un chemin unique ne se recoupant pas qui est de longueur finie. Dans le second cas, il existe une unique manière de joindre deux points extrêmes sans repasser pas le même point, mais la longueur du trajet sera toujours infinie. La situation de ces fractales est un peu étrange et analogue à la frontière du célèbre flocon de Von Koch: deux points ne sont jamais très éloignés à vol d'oiseau l'un de l'autre et ils peuvent être joints l'un à l'autre par une courbe continue, pourtant si vous voyagez à vitesse finie, le trajet qui permet de joindre deux points distincts exigera toujours un temps infini.

Une classification encore plus fine des fractales carrées dendritiques, en 7 sous-catégories, a été proposée en 2023 par Dmitry Drozdov et Andrei Tetenov, montrant que comprendre l'infiniment petit sera peut-être une tâche... sans fin.

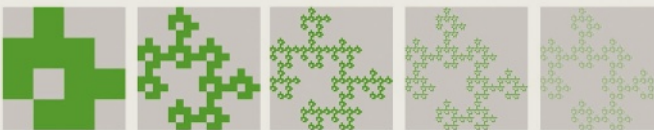
## LES DENDRITES FRACTALES

# 4

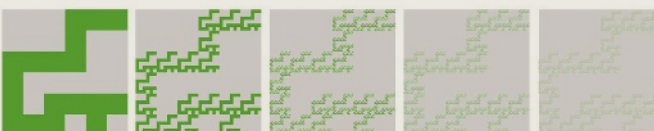
**Les fractales carrées connexes ne contenant pas de boucle se nomment des dendrites. Leur forme générale est celle d'un arbre dont chaque branche possède une infinité de bifurcations. Dans une telle fractale, deux points quelconques peuvent être joints par une courbe continue unique. C'est bien clair pour la fractale de Vicsek, dont on donne ci-dessous une seconde réalisation comme fractale carrée. Dans cette fractale, joindre deux points est toujours faisable par un chemin de longueur fini. Pour le taureau fractal et le Loch Ness fractal, en revanche, ce n'est plus possible : deux points peuvent toujours se joindre par une courbe continue, mais celle-ci aura nécessairement une longueur infinie.**



La fractale de Vicsek (bis)



Le taureau fractal



Le Loch Ness fractal

## LE CAS ÉCLATÉ

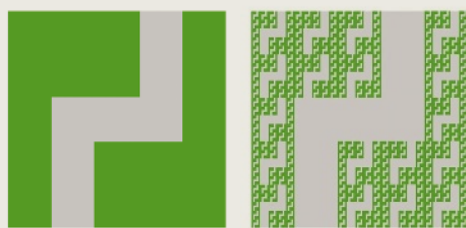
Revenons à présent sur la situation où la fractale carrée  $L$  n'est pas connexe – le « cas éclaté » (voir l'encadré 5). Quand un sous-ensemble  $A$  du plan n'est pas connexe, un grand nombre de situations sont possibles. Il peut y avoir un nombre fini des composantes connexes, une infinité dénombrable ou une infinité non dénombrable. Pour une fractale carrée éclatée, seul le cas fini et le cas infini non dénombrable sont possibles. Dans le cas infini, les composantes connexes peuvent être réduites à des points – on dit alors que  $L$  est totalement discontinu – mais il peut aussi y avoir des segments de droite, ce qui se produit fréquemment. Dans ce dernier cas, ce sont uniquement des segments de droites parallèles entre eux.

Comme expliqué au début de l'article, chaque fractale carrée est définie à partir d'un entier  $k$  et d'un ensemble de coordonnées  $E$ :

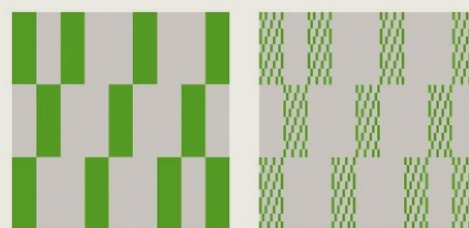
## LES FRACTALES CARRÉES ÉCLATÉES

# 5

Lorsqu'une fractale carrée n'est pas connexe, elle peut posséder un nombre fini de composantes connexes, ou au contraire en avoir un nombre infini. Selon les cas, les composantes connexes sont des segments de droite ou des points. Lorsque les composantes connexes sont réduites à des points, on dit que la fractale carrée est totalement discontinue.



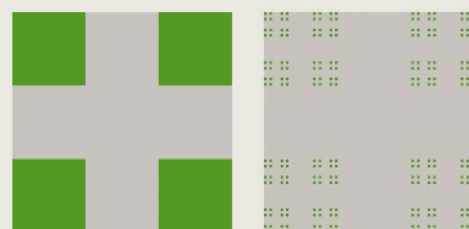
Fractale carrée avec deux composantes connexes



Fractale carrée avec trois composantes connexes



Fractale carrée composée de segments obliques



Fractale carrée totalement discontinue

ce sont des données finies. On peut donc envisager des algorithmes qui, à partir de ces données, indiquent les propriétés topologiques de la fractale produite par le procédé général de Sierpiński. C'est ce qui a été fait par Jian-Ci Xiao en 2020: il a proposé un algorithme qui, après avoir associé un graphe aux données, en déduit si le nombre de composantes connexes de la fractale est fini et calcule alors ce nombre. Ce type de résultats illustre l'idée qu'analyser et connaître les propriétés d'ensembles fractals infiniment fins est possible par des procédés finis. Le fini donne parfois accès à l'infini, comme quand en arithmétique on démontre par un raisonnement fini qu'il existe une infinité de nombres premiers, et bien d'autres choses.

Le cas de l'éclatement en un nombre infini de composantes connexes réduites chacune à un point est intéressant, car il permet d'imaginer une structure pour notre univers qui explique le paradoxe d'Olbers. Ce paradoxe résulte de l'idée que, même si la densité des étoiles dans l'espace est très faible, si elles sont réparties assez aléatoirement et uniformément alors dans toute direction une droite finit par rencontrer une étoile. Si les photons ne perdent pas d'énergie en voyageant vers nous sans rencontrer d'obstacles, la luminosité de la surface d'une étoile est indépendante de sa distance. Donc, dans l'hypothèse où toute direction d'observation intercepte la surface d'une étoile, le ciel nocturne devrait être aussi brillant que la surface d'une étoile

moyenne comme notre Soleil: il devrait être totalement lumineux et nous aveugler. Or ce n'est pas le cas: le ciel nocturne est presque entièrement noir!

Plusieurs solutions au paradoxe sont connues, mais l'une d'elles, proposée en 1907 par Edmund Edward Fournier d'Albe et ensuite rendue plus précise par Benoît Mandelbrot s'appuie sur les structures fractales totalement discontinues. Elle consiste à imaginer qu'il y a bien des étoiles partout dans l'espace (qu'on suppose infini) mais qu'elles sont réparties comme les points d'une fractale totalement discontinue, analogue en trois dimensions à celle présentée en bas à droite dans l'encadré 5, en imaginant qu'on en prolonge la structure au-delà du carré de départ. Cela conduit à une répartition des étoiles qui a les propriétés suivantes:

- (a) Il y a bien des étoiles partout;
- (b) La densité d'étoiles dans une sphère de rayon donné n'est jamais nulle;
- (c) Pourtant, plus le rayon de cette sphère est grand, plus la densité d'étoiles est faible;
- (d) Avec une telle structure le ciel n'est pas totalement lumineux.

L'imagination mathématique s'est affinée en concevant les fractales, qui par ailleurs posent une multitude de problèmes amusants et intrigants. Même avec les contraintes strictes du procédé de Sierpiński, on se trouve confronté à des situations non triviales, qui nous éclairent et même nous aident à comprendre l'infiniment fin. ■

### BIBLIOGRAPHIE

**D. Drozdov et A. Tetenov,** On the classification of fractal square dendrites, *arXiv preprint*, 2023.

**J. C. Xiao,** Fractal squares with finitely many connected components, *Nonlinearity*, 2021.

**K. S. Lau et al.,** Topological structure of fractal squares, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2013.

**L. L. Cristea et B. Steinsky,** Connected generalised Sierpiński carpets, *Topology and its Applications*, 2010.

**L. L. Cristea et B. Steinsky,** Curves of infinite length in  $4 \times 4$ -labyrinth fractals, *Geometriae dedicata*, 2009.

**W. Sierpiński,** Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *Comptes Rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des sciences*, 1915.