RENDEZ-VOUS



# L'HYPERCALCUL EST-IL PARADOXAL ?

**Les mathématiques autorisent des calculs infinis, et certains champs de la physique semblent, eux aussi, en avoir besoin. Mais quel sens donner à de telles opérations ?**

L'AUTEUR

**JEAN-PAUL DELAHAYE**
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

L'infini en physique a-t-il sa place, ou faut-il tout faire pour s'en passer, en particulier quand on envisage les dispositifs de calcul ? La question est particulièrement délicate, car même si, comme nous allons le voir, l'infini peut introduire des paradoxes quand on le prend trop au sérieux, il est par ailleurs difficile de s'en passer dans certains champs de la physique. Avec cette question, la théorie du calcul se trouve face à des difficultés dont on n'a pas toujours conscience et qu'on préfère parfois ne pas voir.

Commençons par jouer avec un vieux paradoxe proposé d'abord en 1953 par le mathématicien britannique John Littlewood, puis en 1976 sous sa forme probabiliste par le mathématicien américain Sheldon Ross. On dispose d'une urne vide et d'une réserve illimitée de billes. Un peu après 11 heures du matin, on place 10 billes dans l'urne. Une demi-heure plus tard (un peu après 11 heures 30), on en retire une. Une fois passé un quart d'heure, on en ajoute 10 nouvelles. On attend de nouveau 1/8 d'heure, et on retire une bille. Puis on attend 1/16 d'heure, et on en ajoute 10 nouvelles. On attend 1/32 d'heure et on en retire une. Et ainsi de suite. On imagine ici qu'on est capable d'agir de plus en plus vite sans limitation – ce qui impose de considérer que le temps est infiniment divisible. À midi toutes les étapes de ce processus se sont déroulées, car $1/2\text{ h}+1/4\text{ h}+\ldots+1/2^n\text{ h}+\ldots=1\text{ h}$. La question est : combien y a-t-il de billes dans l'urne à midi ?

La réponse qui vient immédiatement à l'esprit est qu'il y en a une infinité, car on en ajoute beaucoup plus qu'on n'en retire. Soyons plus précis. On numérote les instants délimitant nos actions : $t_0=11$ heures ; $t_1=(12\text{ h}-1/2\text{ h})$ ; $t_2=(12\text{ h}-1/4\text{ h})$ ; $t_3=(12\text{ h}-1/8\text{ h})$ ; … ; $t_n=(12\text{ h}-1/2^n\text{ h})$. Le nombre de billes dans l'urne à l'instant $t_n$ est donné par le tableau ci-dessous.

Il ne fait aucun doute que le nombre de billes présentes dans l'urne tend vers l'infini quand $n$ tend vers l'infini, c'est-à-dire quand $t_n$ tend vers midi. On devrait donc pouvoir en conclure qu'il y a une infinité de billes dans l'urne à midi.

Mais pas si vite, ce n'est pas certain ! Imaginons en effet qu'on numérote les billes de 1 à 10 pour les dix premières déposées dans l'urne, de 11 à 20 pour les dix suivantes, etc. Imaginons aussi qu'à chaque fois qu'on retire une bille de l'urne, on prenne celle avec le plus petit numéro parmi celles encore présentes. La bille n° 1 est donc retirée avant l'instant $t_2$, la bille n° 2 est retirée avant l'instant $t_4$, la bille n° 3 est retirée avant

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … | $2k$ | $2k+1$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de billes dans l'urne à l'instant $t_n$ | 0 | 10 | 9 | 19 | 18 | 28 | 27 | … | $9k$ | $9k+10$ | … |

Jean-Paul Delahaye a également publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

Les trous noirs de Kerr, des objets théoriques issus des équations d'Einstein, autoriseraient en principe la mise en place d'un dispositif permettant à un agent de recevoir, en une durée perçue finie, les résultats de calculs menés pendant une durée perçue infinie par un autre agent. Cela contredirait des résultats majeurs de non-calculabilité en informatique et d'indécidabilité en logique mathématique.



l'instant $t_6$, etc. Avec ce procédé, on constate que chaque bille déposée dans l'urne finit par être retirée… Par conséquent, à midi, il ne devrait plus rester aucune bille dans l'urne. C'est en contradiction avec le premier raisonnement: nous sommes face à un paradoxe!

Une troisième manière de raisonner va aggraver notre embarras. Quand on retire une bille de l'urne, on ne sait en fait pas lesquelles y ont été mises les premières: on peut donc critiquer le second raisonnement, qui s'appuie sur le retrait de la bille de plus petit numéro. Il est plus raisonnable d'imaginer qu'à chaque retrait, on choisit la bille au hasard uniformément parmi les billes présentes. Que se passe-t-il alors? Commençons par considérer l'une quelconque des dix premières billes placées dans l'urne.

- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée avant l'instant $t_2$ est $p_1=9/10$, car il y avait 10 billes dans l'urne à l'instant $t_1$, et qu'entre $t_1$ et $t_2$ on en a retiré une au hasard.

- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée avant l'instant $t_4$ est $p_2=(9/10)(18/19)$, car il faut à la fois qu'elle soit restée entre $t_1$ et $t_2$ et entre $t_3$ et $t_4$.

- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée avant l'instant $t_{2k}$ est $p_k=(9/10)(18/19)\ldots(9k/(9k+1))$.

Ce type de produits est bien connu des mathématiciens: on démontre que $p_k$ tend vers 0 quand $k$ tend vers l'infini. En effet :

$1/p_k=(10/9)(19/18)\ldots(9k+1)/9k=(1+1/9)(1+1/18)\ldots(1+1/9k)$

En développant le produit, on obtient la minoration:

$1/p_k>1/9+1/18+\ldots+1/9k=(1+1/2+\ldots+1/k)/9$

La série harmonique, au numérateur, tend vers l'infini. Ainsi, $1/p_k$ tend vers l'infini, donc $p_k$ tend vers 0.

La probabilité que la bille considérée soit présente dans l'urne est donc nulle à midi; autrement dit, cette bille est retirée avant midi. Le raisonnement s'étend à chacune des billes mises à un moment ou à un autre dans l'urne. Ainsi, dans le cas d'un retrait au hasard, à midi il ne reste aucune bille dans l'urne – comme lorsqu'on retire la bille de plus petit numéro. Des conclusions contradictoires résultent donc de raisonnements qui, pourtant, semblent tous rigoureux.

## PAS DE PARADOXE ?

Sur un plan mathématique, au sens strict, il n'y a pourtant pas de paradoxe. En effet, la première conclusion se base sur l'idée qu'à midi le nombre de billes dans l'urne est la limite du nombre de billes dans l'urne à l'instant $t_n$. Or, quand on définit la notion de limite d'ensembles, on ne montre pas que « si la limite de la suite d'ensembles $(E_n)$ existe et vaut $E$, alors le nombre d'éléments de $E$ est égal à la limite de la suite "nombre d'éléments de $E_n$" ». On sait d'ailleurs que c'est parfois faux (*voir l'encadré 1*). Sur un plan strictement mathématique, en précisant bien la procédure de retrait des billes, on ne trouvera donc pas de contradiction, car le premier raisonnement n'est pas mathématiquement correct. En revanche, le deuxième et le troisième sont acceptables, car ils précisent bien la procédure de retrait, ce qui rend possible le calcul de la limite du contenu de l'urne, qu'on trouve bien vide à midi.

Du côté de la physique, la méthode pour se défaire du paradoxe est ici plus facile: la situation envisagée n'est pas réalisable, car il faudrait faire des mouvements de plus en plus rapides ce qui nécessiterait, au bout d'un moment, d'aller plus vite que la lumière… ce qui est impossible d'après la théorie de la relativité restreinte. Une autre impossibilité physique provient de ce qu'il n'est pas envisageable d'utiliser une infinité de billes, ou d'avoir à sa disposition une urne pouvant contenir une infinité de billes, ou encore de disposer d'assez d'énergie pour opérer les déplacements de billes de plus en plus nombreuses à mesure que le protocole se déroule.

On le voit avec ce paradoxe de Ross-Littlewood: envisager des actions de plus en plus rapides sans restriction est une proposition qui ne semble pas devoir être prise au sérieux par les physiciens. Il y a près de 2500 ans, les paradoxes de Zénon d'Élée, qui prétendaient prouver l'impossibilité du mouvement, avaient déjà illustré les dangers du découpage infini du temps et de l'espace. Rappelons brièvement le premier de ces paradoxes. Achille court après la tortue partie devant lui, et tout le monde sait qu'il est plus rapide qu'elle. Quand Achille atteint le point où la tortue était au moment de son départ, elle a avancé en un second point. Il faut donc qu'Achille atteigne ce second point pour la rattraper… mais quand il y arrive, la tortue a atteint un troisième point, etc. Achille ne rattrape jamais la tortue!

Aujourd'hui, en mathématiques, on résout les paradoxes de Zénon en considérant qu'une somme infinie de durées peut être finie: dans l'histoire, Achille rattrape donc la tortue au bout d'un temps fini. Une autre solution, parfois préférée des physiciens, s'appuie sur l'idée que ni l'espace ni le temps ne sont en réalité indéfiniment divisibles: vient donc un moment où il est impossible de poursuivre le raisonnement proposé, ce qui lève le paradoxe.

## LA THÉORIE DU CALCUL

La leçon des dangers du découpage infini du temps a été retenue, et quand Alan Turing a publié, en 1936, un dispositif de calcul général susceptible de servir de modèle mathématique à tout système physique effectuant des calculs, il s'est bien gardé de considérer des séquences d'actions de sa machine pouvant s'accumuler infiniment pendant une durée finie – comme c'est le cas dans le paradoxe des billes. Il a, au contraire, fondé sa définition sur l'hypothèse que tout calcul est une suite finie d'opérations élémentaires, chacune opérant avec des symboles en nombre finis et résultant d'instructions en nombre fini (ces dernières constituant le programme de la machine). Sa machine se déplace sur un ruban qui lui sert de mémoire, y écrit et y efface des symboles en suivant pas à pas les instructions du programme. Turing ne précise pas explicitement que chaque pas de calcul exige un minimum de temps, mais cela est implicite dans son modèle: il est donc clair que, pour qu'une de ses machines exécute une infinité de pas, il lui faut une durée infinie.

Toute la théorie classique du calcul se développe à partir de ce modèle. Même quand on considère d'autres mécanismes moins élémentaires que les machines de Turing mais basés uniquement sur des notions finies, les variantes de la théorie du calcul de Turing conduisent aux mêmes notions d'algorithme et de «fonction calculable par machine», appelée parfois «fonction récursive». C'est à partir de cette notion qu'on prouve les formes générales des résultats d'indécidabilité de

## 1 LIMITES D'ENSEMBLES

**À des moments de plus en plus rapprochés de midi, on ajoute dix billes dans une urne, on en retire une, on en ajoute dix, on en retire une, etc. Que trouve-t-on dans l'urne à midi ? Le paradoxe de Ross-Littlewood repose sur le fait que, selon le raisonnement développé, la réponse est soit « une infinité de billes » soit « aucune bille » *(voir le texte courant)*. Ce n'est cependant pas paradoxal pour un mathématicien, qui considère le contenu de l'urne comme un ensemble et les différentes étapes de l'histoire comme des manipulations permettant de constituer une suite d'ensembles. Si $(A_n)$ est une suite infinie d'ensembles, on définit la limite inférieure des $A_n$ ($\liminf A_n$) comme l'ensemble des éléments e qui sont dans tous les $A_n$ à partir d'un certain entier $n$. La limite supérieure des $A_n$ ($\limsup A_n$) est quant à elle l'ensemble des éléments e qui sont dans une infinité de $A_n$. La suite $(A_n)$ converge vers l'ensemble $A$ si et seulement si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$. Par exemple, la suite d'ensembles $A_n = \{0, 1, ..., n\}$ converge vers l'ensemble de tous les entiers quand $n$ tend vers l'infini. Il n'y a pas toujours convergence : par exemple, la suite d'ensembles {0}, {0, 1}, {0}, {0, 1}, {0}, {0, 1}, etc., ne converge pas, car $\liminf A_n = \{0\} \neq \limsup A_n = \{0, 1\}$. La suite d'ensembles $A_n = \{n, n + 1, ... , 2n\}$ converge vers l'ensemble vide. Il n'est donc pas vrai, en général, que « si $A_n$ converge vers $A$ et que la suite du nombre d'éléments de $A_n$ converge vers l'infini, alors $A$ possède une infinité d'éléments ». Dans le problème des billes placées dans l'urne entre 11 heures et midi, il faut expliciter le protocole d'ajout et de retrait des billes pour pouvoir construire une démonstration spécifique et conclure mathématiquement sur le contenu de l'urne à midi. Notons que si la suite d'ensembles associée au protocole n'a pas de limite, comme dans l'exemple au-dessus, le mathématicien ne peut rien affirmer concernant le contenu de l'urne à midi.**

Kurt Gödel, qui assurent qu'aucune axiomatique non contradictoire ne peut démontrer pour tous les énoncés auxquels elle donne un sens s'ils sont vrais ou faux. De manière similaire, on établit des résultats de «non-calculabilité», dont le fameux résultat qui indique qu'un programme qui analyse d'autres programmes ne peut pas, avec certitude, indiquer ceux qui s'arrêteront et ceux qui ne s'arrêteront pas quand on les fera fonctionner. Cette «indécidabilité du problème de l'arrêt» et une multitude de résultats d'impossibilité logique du même type cesseraient d'être vrais si on acceptait des séquences infinies de calculs se déroulant sur une durée finie, comme dans l'histoire de l'urne.

**Une multitude de résultats d'impossibilité logique cesseraient d'être vrais si on acceptait des séquences infinies de calculs se déroulant sur une durée finie**

L'idée qu'on pourrait échapper à l'indécidabilité et à la non-calculabilité fait cependant rêver certains chercheurs. Ils exploitent une sorte d'hésitation de la physique à affirmer que tout doit être envisagé de manière finie. Cette hésitation provient en particulier de ce que la physique, aujourd'hui, se passe rarement de l'infini du continu des nombres réels pour représenter le temps ou l'espace. Certaines tentatives ont donc été faites pour introduire de l'infini dans la théorie du calcul et franchir ainsi ce qu'on a parfois appelé «la barrière de Turing».

## TROUS NOIRS

Commençons par évoquer les dispositifs théoriques de calculs exploitant des trous noirs, que des chercheuses et chercheurs ont imaginés dans le cadre de la relativité générale et qui contredisent les principes adoptés par Turing. Ces dispositifs exploitent un aspect clé de la relativité générale, qui pose que le temps n'est pas absolu, mais au contraire local. Autrement dit, il s'écoule différemment pour deux observateurs situés en deux points distincts de l'espace. C'est cette subtilité qui va permettre, si certaines autres conditions sont réunies, de concevoir un dispositif dans lequel un observateur reçoit, en un temps fini pour lui, toutes les informations émises par un autre observateur pendant une durée que lui perçoit infinie.

Dans un article de 2018 faisant la synthèse d'une série de travaux antérieurs sur le sujet, la professeuse Hajnal Andréka, de l'institut mathématique Alfréd-Rényi, de l'Académie hongroise des sciences, à Budapest, et ses collègues envisagent un tel système relativiste susceptible de dépasser les limites auxquelles sont soumises les machines de Turing.

Rappelons qu'un trou noir est délimité par une surface appelée «horizon des événements», qui scinde l'espace-temps en deux parties – l'extérieur du trou noir et son intérieur. Cet horizon des événements a ceci de particulier qu'il n'est franchissable que dans un sens: l'extérieur du trou noir peut influencer son intérieur, mais la réciproque n'est pas vraie. De manière plus imagée: on peut tomber à l'intérieur du trou noir quand on vient de l'extérieur, mais on ne peut pas en sortir lorsqu'on est dedans.

L'aspect relatif du temps en relativité générale fait qu'une durée perçue comme très courte par un observateur très proche de l'horizon des événements d'un trou noir sera perçue comme bien plus longue par un observateur lointain, le rapport entre les deux durées tendant vers l'infini quand l'observateur à proximité de l'horizon s'en rapproche. On pourrait donc imaginer une machine de Turing placée à l'horizon des événements d'un trou noir, qui communiquerait avec une autre machine de Turing, distante: cela permettrait à la première machine de recevoir, en un temps fini pour elle, les résultats de calculs menés en un temps infini par la seconde machine… mais la réalité est plus subtile. En fait, il ne suffit pas qu'il y ait un rapport infini entre les temps perçus par les deux machines: il faut aussi que la machine placée à proximité du trou noir soit capable de recevoir, en un temps fini pour elle, toute l'information transmise par l'autre machine pendant une durée infinie pour cette dernière !

Dans les trous noirs dits «de Kerr», qui sont en rotation, c'est théoriquement possible. Car dans ces trous noirs bien particuliers, si aucun effet de la mécanique quantique n'est pris en compte dans leur modélisation, il existe un second horizon des événements à l'intérieur du trou noir, appelé «horizon interne». Or, du fait de la géométrie particulière de ce type de trou noir, quand un observateur parcourt en un temps fini la distance entre l'horizon externe et l'horizon interne, il peut recevoir dans ce laps de temps une quantité infinie d'information en provenance de l'extérieur du trou noir. Ainsi, si l'on imagine deux machines de Turing qui communiquent entre elles, l'une tombant dans le trou noir et la seconde faisant des calculs pendant une durée infinie en transmettant au fur et à mesure ses résultats à la première, on peut théoriquement dépasser la barrière de Turing.

À titre d'illustration, considérons par exemple le problème de l'arrêt. La machine éloignée du trou noir fait fonctionner progressivement tous les programmes possibles, jusqu'à ce qu'ils s'arrêtent (s'ils s'arrêtent bien). Au fur et à mesure que certains programmes s'arrêtent, l'information est envoyée à la machine qui se dirige vers l'horizon interne du trou noir. Le temps écoulé, infini pour la machine restée à distance, n'a pour l'autre machine qu'une durée finie. Une fois cette durée perçue finie écoulée, la machine précipitée dans le trou noir sait donc, pour chaque programme, s'il s'arrête ou non, car elle a reçu l'information de la part de la première machine – et en un temps fini, pour elle! Le problème de l'arrêt des programmes, *a priori* indécidable, est devenu décidable.

## IRRÉALISTE

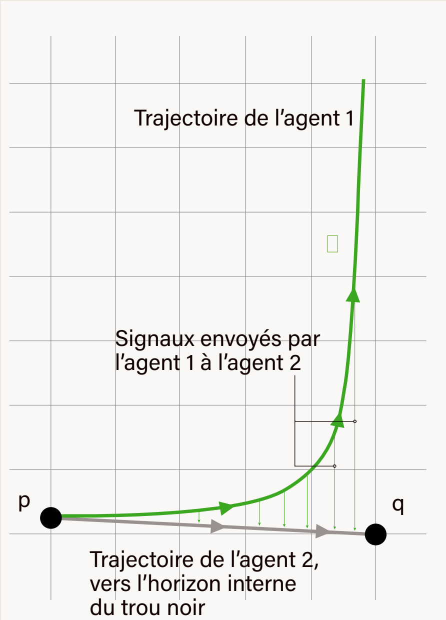
Le souci, c'est qu'un tel dispositif, s'il est mathématiquement envisageable, est largement irréaliste d'un point de vue physique. Les trous noirs de Kerr ont beau constituer une solution exacte des équations d'Einstein, ils présentent au moins deux difficultés: «D'abord, ce modèle décrit des trous noirs qui auraient toujours existé, avec des propriétés perpétuelles, invariantes, ce qui n'est pas réaliste d'un point de vue physique, explique Loïc Villain, spécialiste des trous noirs à l'université de Tours. Par ailleurs, même en admettant que cette solution mathématique ait un semblant de réalisme, elle décrit l'intérieur d'un trou noir de Kerr comme hautement instable: si l'on fait tomber la moindre miette dedans, toute la physique décrite par les équations change complètement! Car n'importe quelle énergie extérieure, une fois franchi l'horizon externe des événements, se voit modifiée de manière exponentielle, ce qui altère la description de l'intérieur du trou noir. D'ailleurs, le mécanisme sous-jacent est directement relié à celui qui rend possible l'observation d'une infinité d'événements extérieurs au trou noir en un temps fini à l'intérieur… Autrement dit, ce genre de scénario est d'autant plus bancal qu'il contient intrinsèquement des arguments pour soutenir son caractère hautement artificiel!»

Sans compter une difficulté expérimentale plus évidente encore: dans le dispositif décrit, l'information ne peut transiter que depuis la machine restée à distance du trou noir vers celle qui tombe dedans, puisque l'horizon externe des événements ne peut être franchi que dans un sens. Impossible, donc, de vérifier si l'expérience a fonctionné, puisque la machine tombée à l'intérieur du trou noir ne pourra jamais transmettre le moindre résultat! Un autre problème est que cette machine serait très certainement détruite par le signal reçu avant l'instant limite de la réception, à cause de l'énergie cumulée de toute l'information.

La question de savoir si les systèmes proposés sont simplement des artefacts du formalisme de la relativité générale et d'autres théories relativistes de la gravitation ou si, au contraire, le type de tâches infinies qu'ils permettraient est à considérer sérieusement dans le cadre de modèles plus réalistes que ceux connus à ce jour est discutée depuis plus de vingt ans. Mais pour John Manchak, philosophe à l'université de Californie à Irvine, aux États-Unis, spécialiste des questions liées à

## 2 CALCULS INFINIS DANS UN MONDE RELATIVISTE

**Certaines solutions des équations d'Einstein de la relativité générale, c'est-à-dire certains espaces-temps à la géométrie très particulière, admettent l'existence de courbes λ dans l'espace-temps le long desquelles le temps vécu est illimité et telles que, pourtant, la totalité de la courbe λ est incluse dans le passé de durée finie d'un événement *q*. De telles situations rendent possibles, en théorie, des calculs infinis. Deux agents souhaitant exploiter une telle situation se placeraient au départ en un point *p* d'une telle courbe λ – ce qui signifie qu'ils seraient, initialement, au même endroit au même instant. Chacun entreprendrait son voyage, le premier se déplaçant, dans l'espace-temps, le long de la courbe λ *(en vert sur le graphique)* de durée vécue infinie ; le second le long de la trajectoire spatiotemporelle reliant *p* à *q (en gris sur le graphique)*, en une durée perçue finie. Le second agent détecterait les signaux envoyés par le premier. Si on suppose que le premier agent effectue un calcul comportant une infinité d'étapes, l'ensemble de son processus de calcul sera inclus dans le passé du second agent voyageant de *p* à *q*. Si ce second agent est informé des résultats du calcul infini mené par le premier, tout se passera pour lui comme s'il disposait des résultats d'un calcul infini, bien qu'il ait vécu une durée finie. Les trous noirs de Kerr permettent, en théorie, cette situation. La courbe λ est celle d'un voyageur (le premier agent) restant à l'écart du trou noir (par exemple en tournant autour indéfiniment), menant un calcul infini dont il communique au fur et à mesure de son déroulement les résultats en les envoyant au second agent. La courbe reliant *p* à *q* est celle d'un voyageur (le second agent) se précipitant dans le trou noir en rotation, jusqu'à l'horizon interne (qu'il atteint en *q*), et qui recevra tous les résultats du calcul mené par l'autre agent. Notons, par souci de rigueur, que cette figure est purement illustrative et ne fournit pas une représentation correcte d'un espace-temps de Kerr. Si la méthode décrite était applicable en pratique, on pourrait résoudre le problème de l'arrêt et contredire de nombreux théorèmes de limitations énoncés depuis Gödel et Turing par les logiciens.**



l'espace-temps, elle n'est aujourd'hui toujours pas tranchée. Retenons cependant que, même si la relativité générale pourrait permettre d'envisager une forme de calcul infini, la mise en œuvre d'un dispositif concret permettant cet « hypercalcul » n'a aujourd'hui aucune crédibilité physique.

## RÉSEAUX DE NEURONES

Aujourd'hui encore, il arrive que certaines personnes proposent une autre tentative pour dépasser les limites du modèle de calcul de Turing, en s'appuyant sur les travaux de l'informaticienne Hava Siegelmann, professeuse à l'université du Massachusetts à Amherst, aux États-Unis. Cette dernière étudie des systèmes abstraits de calcul utilisant des paramètres réels – c'est-à-dire des nombres réels quelconques intervenant dans la configuration du système de calcul. Les réseaux de neurones artificiels, vus mathématiquement, sont de cette nature : ce sont essentiellement des fonctions dont les paramètres sont optimisés au fil de l'apprentissage. Au début des années 1990, la chercheuse démontre qu'il est possible d'encoder une machine de Turing dans un tel système de calcul – par exemple, un réseau de neurones. Autrement dit, un réseau de neurones a une puissance de calcul équivalente à une machine de Turing.

À la suite de ces travaux, en 1995, la chercheuse publie dans *Science* un article qui annonce clairement l'enjeu par son titre : « Computation beyond the Turing limit » (« Calcul par-delà la barrière de Turing »). Le papier, cité plus de 400 fois depuis sa publication, démontre notamment qu'un réseau de neurones à paramètres réels permet de mener des calculs qu'aucune machine de Turing ne peut conduire. Les réseaux de neurones seraient-ils donc la solution pour franchir la barrière de Turing en pratique ?

Personne ne conteste les énoncés mathématiques de Hava Siegelmann. En revanche, faire appel à ces travaux pour revendiquer la possibilité de dépasser la barrière de Turing en pratique est illusoire ! Les systèmes qu'elle étudie ont en effet des paramètres réels, et c'est en s'appuyant sur l'infinité possible de leurs décimales que certains calculs qu'ils effectuent dépassent la barrière de Turing. Une manière de le comprendre est d'imaginer que l'on cache de l'information dans un paramètre réel utilisé par un programme : en allant chercher cette information lors du calcul, on peut assez facilement imaginer faire des « miracles ». Par exemple : numérotons tous les programmes existants (programme n° 1, n° 2, etc.) et considérons le nombre noté $\alpha$ qui a pour $n$-ième chiffre binaire un 0 si le programme numéro $n$ s'arrête, et un 1 s'il ne s'arrête pas. En considérant que $\alpha$ est un

> **Un réseau de neurones a une puissance de calcul équivalente à une machine de Turing**

paramètre présent dans le programme du dispositif de calcul, alors en faisant remonter ses décimales, le dispositif traitera sans erreur le problème de l'arrêt : il trouvera dans $\alpha$ la réponse à toute question concernant l'arrêt des programmes. Ce n'est cependant pas sérieux, car si ce nombre réel $\alpha$ a bien une existence mathématique, pour autant personne ne le connaît ! Supposer qu'on pourrait, en pratique, écrire un programme comportant ce nombre comme paramètre, c'est donc supposer résolu *a priori* le problème qu'on veut résoudre. Oui, mathématiquement, il y a bien un programme au sens de Hava Siegelmann qui résout le problème de l'arrêt, mais personne ne sera jamais en mesure de l'écrire.

D'ailleurs, lorsque Hava Siegelmann restreint son étude à des systèmes auxquels elle impose des paramètres avec une précision limitée (par exemple : 1000 décimales), ou même des paramètres rationnels (quotients de deux entiers), alors ses modèles de calculs redeviennent strictement équivalents, en puissance, aux machines de Turing. Il fait aujourd'hui consensus que les systèmes de calcul qu'elle étudie ne permettent pas, en pratique, de faire de l'« hypercalcul », puisque le monde réel empêche l'utilisation « magique » de paramètres réels quelconques. En particulier, les réseaux de neurones physiques ne permettent pas de dépasser la barrière de Turing. Précisons toutefois que cela ne signifie pas que les réseaux de neurones artificiels soient inutiles, mais seulement que leur intérêt ne provient pas d'une hypothétique faculté d'« hypercalcul ».

On constate que la physique et le calcul entretiennent des relations compliquées, que l'on n'a pas encore réussi à rendre parfaitement claires. Il faut, pour cela, blâmer l'infini, qui ne gêne guère les mathématiciens mais qui trouble gravement les physiciens. Par certains aspects, la question est presque aussi philosophique et épistémologique que proprement scientifique. ■

## BIBLIOGRAPHIE


**O. Shagrir,** *The nature of Physical Information*, Oxford University Press, 2022.

**J. B. Manchak et B. Roberts,** *Supertasks*, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Department of Philosophy, Stanford University, 2022.

**J. B. Manchak,** Malament-Hogarth Machines, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 2020.

**H. Andréka et al.,** *Relativistic Computation,* in *Physical perspectives on computation, computational perspectives on physics*, Cambridge University Press, 2017.

**P. Davies,** *The implications of a cosmological information bound for complexity, quantum information and the nature of physical law*, in *Randomness & Complexity, from Leibniz to Chaitin*, World Scientific, 2007.

**G. Etesi et I. Németi,** Non-Turing computations via Malament-Hogarth space-times, *International Journal of Theoretical Physics*, 2002.

**H. Siegelmann,** Computation beyond the Turing limit, *Science*, 1995.