# LES MYSTÈRES DES PAVAGES PAR DOMINOS

**De «l'échiquier mutilé» aux assemblages exotiques de petits carrés, la question des formes «dominables» est levée petit à petit, non sans difficulté.**

L'AUTEUR

**JEAN-PAUL DELAHAYE**
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Jean-Paul Delahaye a également publié : **Au-delà du Bitcoin** (Dunod, 2022).

Un domino est un rectangle de taille 1×2, c'est-à-dire la figure obtenue en accolant deux carrés de même taille par un côté. Plus généralement, une forme composée en assemblant des carrés de même taille par leurs côtés sera ici appelée un «polygone orthogonal».

Une question générale, en apparence élémentaire, va nous intéresser : quels polygones orthogonaux peut-on construire en regroupant plusieurs dominos par des côtés de leurs carrés et quels polygones orthogonaux sont impossibles à produire de cette façon ? Quand un polygone orthogonal pourra être obtenu, nous dirons qu'il est «pavable par dominos» ou «dominable». La question se reformule donc ainsi : quels polygones orthogonaux sont dominables ?

Considérez par exemple les polygones orthogonaux de la figure 1. Il est immédiat que (a) et (b) sont dominables. Puisque tout domino couvre deux carrés, un polygone orthogonal composé d'un nombre impair de carrés n'est pas dominable : la forme (c), composée de neuf carrés, n'est donc pas dominable. La forme (d) est composée de douze cases, soit un nombre pair, pourtant en essayant longuement vous vous persuaderez qu'elle n'est pas dominable. Comment le démontrer ?

Le problème pour la forme (d) est classique : c'est un cas particulier du «problème de l'échiquier mutilé». On le résout en imaginant un coloriage du polygone orthogonal par des cases de deux couleurs (ici, vert et gris), comme sur un damier ou un échiquier. Chaque domino posé couvre exactement une case grise et une case verte : pour qu'un polygone orthogonal soit dominable, il faut donc qu'il comporte autant de cases vertes que de cases grises. Ce n'est pas le cas pour la forme (d), qui contient huit cases vertes et six cases grises, comme on le voit sur la figure 2. La forme (d) n'est donc pas dominable.

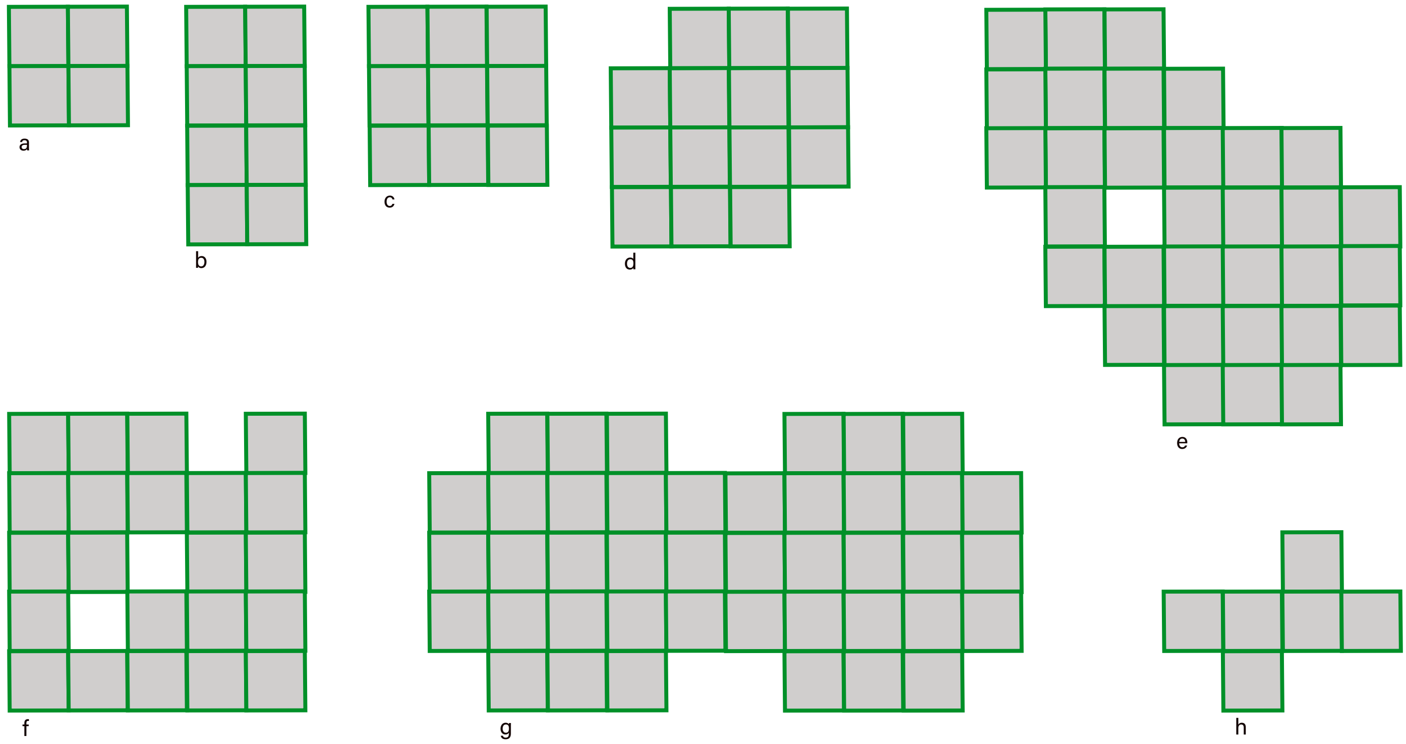
La condition nécessaire «même nombre de cases grises que de cases vertes» n'est pas suffisante : on s'en convainc en regardant les formes (e), (f), (g) et (h), qui remplissent cette condition mais ne semblent pourtant pas dominables. Le plus petit exemple (en termes de nombre de carrés) pour le vérifier est la forme (h), qui présente trois carrés verts et trois carrés gris. La preuve qu'elle n'est pas dominable apparaît immédiatement : pour paver avec des dominos, il en faudrait un en position verticale pour chacune des «bosses» en haut et en bas. Mais une fois placés ces deux dominos contraints, les deux cases restantes ne peuvent pas être couvertes par un seul domino.

## CHEMINS

Un problème assez général, similaire à celui de la forme (d) («4×4 moins deux coins»), se résout très bien avec un peu d'astuce, grâce au coloriage et à une nouvelle idée. La question est : un échiquier de taille $2n\times2n$ auquel on

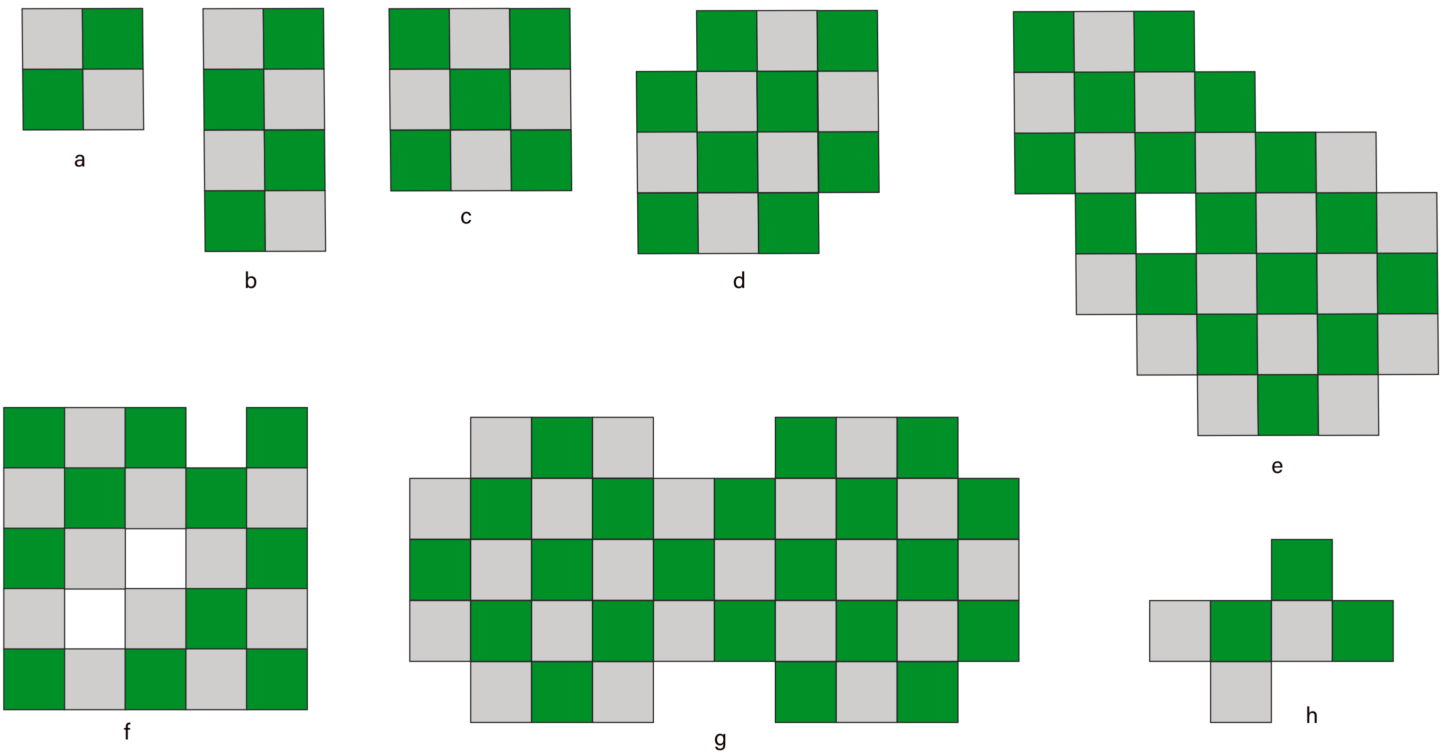
1

Quelques exemples de polygones orthogonaux.




2

Pour déterminer si une forme est pavable par dominos, on colorie ses carrés pour former un damier. Une forme dominable comporte alors nécessairement autant de carrés gris que de carrés verts.



# 1 UN OS POUR LA DÉMONSTRATION AUTOMATIQUE

La méthode du coloriage d'un polygone orthogonal en damier, qui fournit une condition nécessaire pour que la forme soit dominable (autant de carrés verts que de carrés gris), semble simple. Pourtant, elle ne s'impose pas du tout comme une évidence quand on tente une démonstration automatique par ordinateur. En 1999, John McCarthy, un des pionniers de l'intelligence artificielle, s'est intéressé à ce sujet. Il proposa de soumettre à un démonstrateur automatique une version du problème de l'échiquier mutilé : un échiquier 8 × 8 auquel on retire deux coins opposés verts et qui contient donc deux cases grises de plus que de cases vertes – ce qui devrait tout de suite alerter sur le caractère non dominable de la forme. Pour John McCarthy, cet exemple permet de comprendre ce qu'est la créativité. Il affirme en effet que « la solution à un problème est créative si elle oblige à introduire des concepts qui ne sont pas présents dans l'énoncé du problème et les connaissances usuelles qui lui sont reliées ». Or il avait noté dès 1964 que ce problème de l'échiquier mutilé engendrait des difficultés pour les démonstrateurs automatiques les plus simples. Son article *« A though nut for proof procedure »* (« Un os pour les programmes de démonstration automatique ») tente d'expliquer pourquoi. Son travail fut complété en 2000 par Stephan Dantchev et Søren Riis, puis par Michael Alekhnovich en 2003, qui quantifièrent rigoureusement cette difficulté.Pour traiter le cas du pavage par dominos d'un échiquier de taille $2n \times 2n$ auquel deux coins opposés ont été retirés, les démonstrateurs automatiques les plus simples traduisent l'énoncé du problème en langage propositionnel – c'est-à-dire sous la forme d'une liste de conditions du type « (A ou B) », « (B et non C) », « ((E et B) ou F) », etc. – et lui appliquent une méthode de résolution très classique appelée… « méthode de résolution ». Les chercheurs mentionnés ci-dessus ont établi qu'elle exige un nombre d'étapes de calcul croissant exponentiellement en fonction de $n$. Voilà donc un exemple pour lequel un humain attentif voit instantanément la solution du problème à l'aide d'une astuce de coloriage, là où un calculateur aveugle, incapable de faire preuve de cette « créativité », ne réussit que péniblement à le résoudre – voire échoue à trouver la solution, si $n$ est trop grand. Notons que ces problèmes d'échiquiers mutilés ont une longue histoire. Ils ont été proposés par le philosophe Max Black dans son livre *Critical Thinking* de 1946, puis le mathématicien Solomon Golomb, le physicien George Gamow et le célèbre chroniqueur Martin Gardner en ont fait la publicité.

retire une case grise quelconque et une case verte quelconque est-il toujours dominable?

La réponse est oui, et la démonstration surgit d'un petit dessin présenté sur la figure 3: on construit un chemin parcourant l'échiquier et revenant à son point de départ. La suppression de deux cases quelconques, l'une verte et l'autre grise, coupe le chemin fermé en laissant deux bouts de chemin de longueur paire (car ces chemins alternent les cases vertes et les cases grises, et ont à leurs extrémités des cases de couleurs différentes). Les deux chemins sont dominables, donc l'est aussi l'échiquier avec deux cases en moins. Une variante montre qu'un échiquier de côté impair auquel on enlève n'importe quelle case de la couleur des quatre coins est dominable.

En avril 2024, à l'occasion du congrès de l'association Math-en-Jeans à l'université d'Avignon, un élève du lycée Stendhal de Milan, Hugo Marcolivio, a envisagé une variante qui, cette fois, ne se laisse traiter ni par la méthode du coloriage, ni facilement par celle des chemins. On considère un échiquier carré de côté impair coloré en vert et gris avec les coins en vert. Il possède donc une case verte de plus que de cases grises. On retire deux cases vertes et une case grise quelconques, ce qui établit un équilibre entre cases vertes et grises. Peut-on prouver que cet échiquier «mutilé» de trois cases est toujours dominable?

Les essais de Hugo Marcolivio l'ont conduit à penser que la réponse était affirmative. Mais comment le prouver? En s'y mettant à trois, l'étudiant français et deux autres participants au congrès, Roland Yéléhada et Anne-Cécile Airoldi, ont fini par découvrir une démonstration. La méthode procède par récurrence et exige de traiter six cas différents (*voir l'encadré 2*). Une autre méthode à base de chemin a plus tard été mise au point par Hugo Marcolivio.

## TROIS RÉSULTATS

On a donc finalement trois résultats généraux concernant les échiquiers mutilés.

(1) Un échiquier carré de côté impair dont les coins sont verts et auquel on retire une case est dominable si et seulement si la case retirée est verte.

(2) Un échiquier carré de côté pair auquel on retire deux cases est dominable si et seulement si l'une des cases enlevées est verte et l'autre grise.

La démonstration de ces résultats par la méthode du chemin est due au mathématicien américain Ralph Gomory, et a été présentée en 1973 dans un article du mathématicien canadien Ross Honsberger. Ces deux points

3

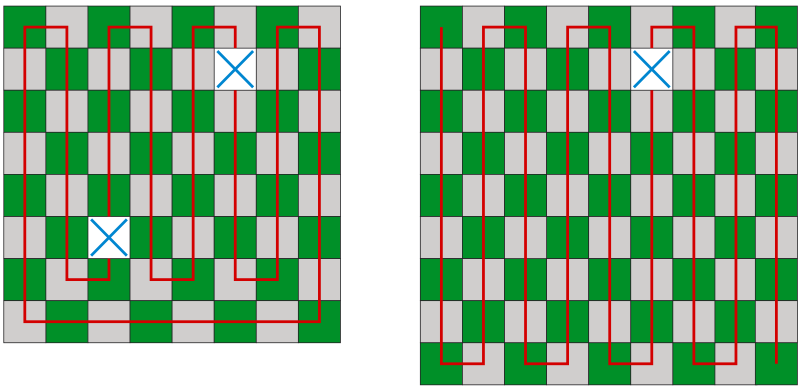


Illustration de la méthode des chemins, qui permet de démontrer qu'en retirant deux cases de couleurs différentes à un damier carré de côté pair, on peut toujours le paver avec des dominos. Dans le cas d'un damier de côté impair auquel on retire une case, la méthode permet de démontrer que si la case enlevée rétablit l'équilibre entre les vertes et les grises, la figure est dominable, sinon elle ne l'est pas.

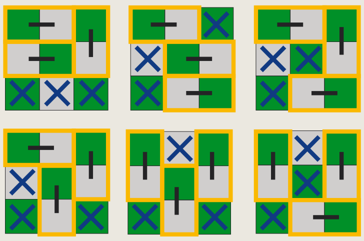
## 2 LE THÉORÈME DE MARCOLIVIO-AIROLDI-YÉLÉHADA

On se donne un grand carré $C$ composé de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ carrés de même taille, avec $n \geq 1$ un entier. On le colorie en damier, avec les coins en vert. Il comporte donc une case verte de plus que de cases grises. On sait que si l'on enlève une case verte quelconque de $C$, alors la forme obtenue est dominable (cela nous sera utile). On veut à présent démontrer que si on enlève à $C$ deux cases vertes quelconques et une case grise quelconque, alors la forme obtenue est dominable.

Remarquons que si on enlève trois cases à C qui ne sont pas « deux cases vertes et une grise », alors la forme obtenue n'est pas dominable puisqu'il n'y aura pas autant de cases grises que de cases vertes. L'énoncé qu'on cherche à prouver fournira donc une condition nécessaire et suffisante : « Un carré de taille $(2n + 1) \times (2n + 1)$ ayant ses coins verts et auquel on retire trois cases est dominable si et seulement si les cases enlevées sont deux vertes et une grise. »

**Démonstration**

Pour prouver que la condition est suffisante, on procède par récurrence sur $n$. Le résultat est vrai quand $n = 1$ d'après le dessin ci-dessous, qui permet de traiter tous les cas possibles pour le carré de taille $3 \times 3$ : tous les cas se ramènent, par rotation et symétrie, à l'une des six configurations dessinées.

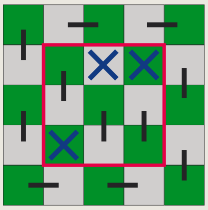


Supposons à présent que le résultat est vrai au rang $n$ (c'est-à-dire pour un carré de taille $(2n + 1) \times (2n + 1)$), et montrons qu'il reste vrai au rang $n + 1$ (c'est-à-dire pour un carré de taille $(2(n + 1) + 1) \times (2(n + 1) + 1) = (2n + 3) \times (2n + 3)$).

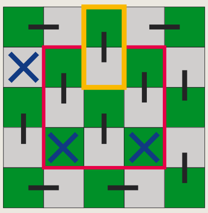
Les dessins représentés et les raisonnements que nous donnons décrivent le passage du cas $n = 1$ (carré de taille $3 \times 3$) au cas $n = 2$ (carré de taille $5 \times 5$), mais il est facile de voir que le cas général se traite de la même façon. Le principe du raisonnement est d'ajouter au carré de taille $(2n + 1) \times (2n + 1)$ une couche d'épaisseur 1 tout autour, ce qui donne un carré de taille $(2n + 3) \times (2n + 3)$.

Les différents cas consistent à imaginer que les deux cases vertes et la case grise enlevées sont réparties entre le pourtour et le carré central. Il y a six répartitions possibles.

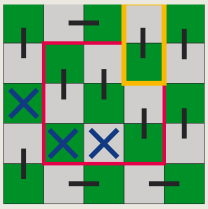
**Cas 0V-0G :** Aucune case n'est enlevée au pourtour ; les deux cases vertes et la case grise sont retirées du carré central. La partie centrale à laquelle on a enlevé deux cases vertes et une case grise est dominable d'après l'hypothèse de récurrence. Le pourtour, qui comporte un nombre pair de cases (16 dans le cas dessiné, $8n$ dans le cas général) est dominable. L'ensemble est donc dominable.



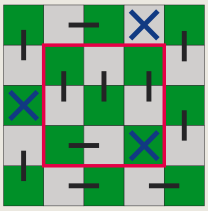
**Cas 0V-1G :** Une case grise est enlevée au pourtour, deux cases vertes sont enlevées au carré central. On choisit une case verte quelconque du pourtour, et on place un domino à cheval sur cette case et sur le carré central (en jaune sur le dessin ci-dessous). La case du carré central recouverte par ce domino est nécessairement grise. Ce qui reste du pourtour est composé d'une ou deux parties de longueur paire (car chacune se terminant par une case grise à un bout et une case verte à l'autre). C'est donc dominable. Dans la partie centrale, on a à présent retiré deux cases vertes et une case grise : l'hypothèse de récurrence indique ainsi que cette partie est dominable. L'ensemble est par conséquent dominable.



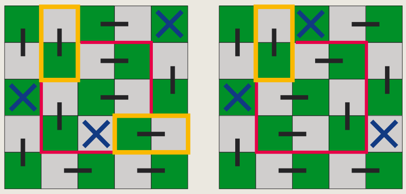
**Cas 1V-0G :** Une case verte est enlevée au pourtour, une case verte et une case grise sont enlevées au carré central. On choisit une case grise quelconque du pourtour, et on place un domino (en jaune sur le dessin ci-dessous) à cheval sur cette case et sur le carré central ; la case du carré central recouverte par ce domino est nécessairement verte. Il faut s'assurer que la case recouverte par le domino ne soit pas la case verte retirée au centre – cette condition est toujours réalisable. Ce qui reste du pourtour est composé d'une ou deux parties de longueur paire (car chacune se terminant par une case grise à un bout et une case verte à l'autre). Le pourtour restant est donc dominable. Pour la partie centrale, on conclut comme précédemment grâce à l'hypothèse de récurrence. L'ensemble est donc dominable.



**Cas 1V-1G :** Une case verte et une case grise sont enlevées au pourtour, une case verte est retirée au carré central. Ce qui reste du pourtour est dominable, car composé d'un ou deux chemins de longueur paire. Le carré central est dominable, car il correspond au cas où un carré vert a été enlevé à un carré de côté impair, qui se traite avec la méthode des chemins (voir le texte de l'article). Le tout est donc dominable.



Les deux derniers cas se traitent de manière similaire, comme le montrent les dessins ci-dessous.



Le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure.

constituent le «théorème de Gomory». Le troisième résultat est celui établi il y a quelques mois lors du congrès Math-en-Jeans, qu'on propose d'appeler «théorème de Marcolivio-Airoldi-Yéléhada»:

(3) Un échiquier carré de côté impair dont les coins sont verts et auquel on retire trois cases est dominable si et seulement si deux des cases enlevées sont vertes et la troisième grise.

Les méthodes par chemin et par récurrence s'adaptent sans mal pour démontrer des résultats similaires sur des échiquiers mutilés rectangulaires. Bien sûr, on se demande si l'on peut aller plus loin, par exemple en retirant plus de trois cases. Mais ce n'est pas le cas: dans ces conditions, il n'y a plus de résultat général. Quand on enlève quatre cases à un échiquier carré de côté pair, ou cinq cases à un échiquier carré de côté impair en prenant bien garde aux couleurs des cases retirées pour qu'il en reste autant de chaque couleur, alors parfois le résultat est dominable, parfois non.

Pour les formes plus générales, quelques beaux résultats ont cependant été découverts et démontrés. En voici deux:

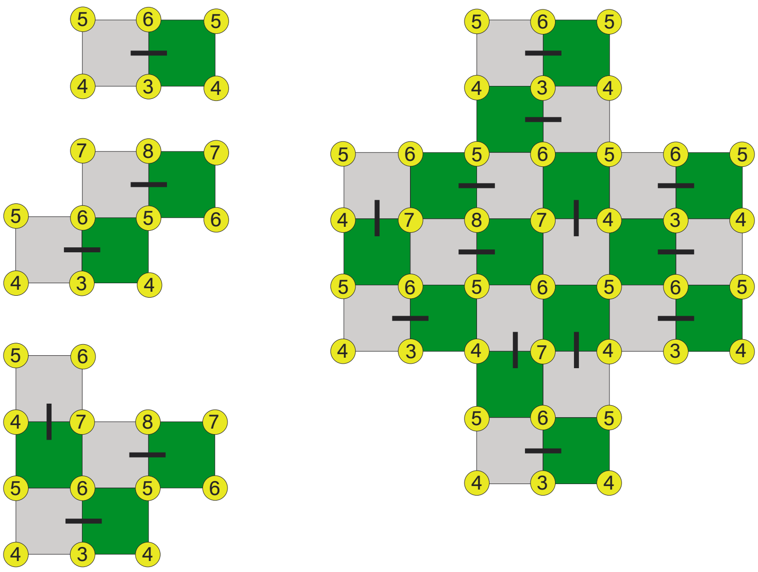
(a) Si tous les côtés d'un polygone orthogonal (avec ou sans trous) ont des longueurs paires, alors il est dominable.

(b) Si tous les côtés d'un polygone orthogonal sans trou ont des longueurs impaires alors il n'est pas dominable.

Pour le cas des côtés pairs, la démonstration est assez facile, et seule la gestion des «trous» exige un peu d'astuce. Concernant les côtés impairs, une démonstration plutôt compliquée a été proposée en 1999 par une équipe de chercheurs autour de György Csizmadia. En tentant de simplifier le raisonnement, je me suis rendu compte pour ma part qu'une astuce ancienne introduite en 1990 par John Conway – le célèbre créateur du Jeu de la vie – permettait de retrouver le résultat, et donnait en réalité bien plus. Il s'agit de l'astuce des «systèmes orientés de poids» (*height function*, en anglais). C'est un outil extraordinaire, qui peut s'appliquer à d'autres problèmes que ceux des pavages par dominos, et qui est à l'origine d'une multitude d'articles mathématiques.

**L'astuce des systèmes orientés de poids est un outil extraordinaire**

4



**Exemples de polygones orthogonaux dominables munis d'un système orienté de poids.**

## SYSTÈMES ORIENTÉS DE POIDS

Si un pavage par dominos d'un polygone orthogonal est donné, on peut attribuer des poids – des nombres entiers – à chaque sommet des carrés composant le polygone. Pour un domino unique, un «système orienté de poids» est l'attribution d'un entier à chacun des six sommets des deux carrés le composant, de sorte que lorsqu'on tourne autour du domino dans le sens «direct» – c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre –, les entiers attribués aux sommets augmentent d'une unité si, à gauche du segment orienté reliant les deux sommets consécutifs, il y a une case verte, et au contraire diminuent d'une unité si à gauche de ce segment orienté il y a une case grise.

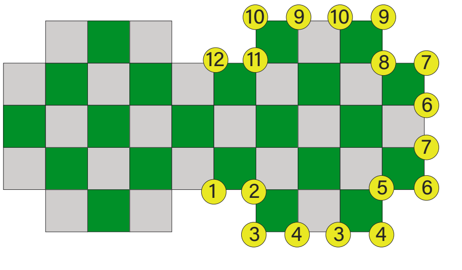
Si, pour un ensemble sans trou constitué de dominos posés sur un damier, il est possible d'attribuer des poids à chaque sommet de l'ensemble de sorte que chaque domino dispose d'un système orienté de poids, on dit que cet ensemble de dominos «admet un système orienté de poids». La figure 4 montre quelques exemples. On va démontrer par récurrence que c'est le cas pour tout ensemble sans trous de dominos posés sur un damier.

C'est évident s'il n'y a qu'un seul domino. Supposons le résultat vrai pour un ensemble sans trou à $n$ dominos. Alors en suivant le périmètre de l'ensemble des dominos dans le sens direct, les entiers attribués aux sommets augmentent d'une unité quand, à gauche du segment orienté qui les joint, il y a une case verte, et diminue d'une unité quand, à gauche, il y a une case grise. En ajoutant un domino pour obtenir un ensemble sans trou à $n+1$ dominos, on peut donc définir des poids compatibles avec ceux qui sont déjà présents, car à côté d'une case verte, c'est une grise que l'on place, et réciproquement. Cela crée, pour l'ensemble sans trou à $n+1$ dominos, un système orienté de poids. En conséquence, tout polygone orthogonal dominable peut-être muni d'un système orienté de poids concernant tous les sommets des carrés.

L'existence d'un tel système orienté de poids associé à tout polygone orthogonal sans trou dominable a des conséquences immédiates remarquables. Ainsi, si un polygone orthogonal sans trou est dominable, en parcourant son périmètre dans le sens direct, il y a autant de variation $+1$ que de variation $-1$ pour le poids des sommets consécutifs et, de ce fait, «les cases à gauche des segments orientés composant le périmètre sont aussi souvent grises que vertes». On obtient ainsi instantanément une condition nécessaire pour qu'une telle forme soit dominable!

Cela permet aussi de retrouver le résultat (b) énoncé précédemment, qui affirme qu'un polygone orthogonal sans trou dont tous les $k$ côtés ont des longueurs impaires n'est jamais dominable. En effet: si les $k$ côtés ont des longueurs impaires, alors les extrémités de chacun d'eux sont de la même couleur – disons vertes. Par conséquent, en parcourant le périmètre dans le sens direct on rencontrera à gauche exactement $k$ cases vertes de plus que de cases grises (avec, bien sûr, $k > 0$), ce qui rend impossible un pavage par dominos. Plus généralement, pour qu'un polygone orthogonal sans trou soit dominable il est nécessaire qu'il y ait exactement autant de segments du périmètre de longueur impaire allant d'une case verte à une case verte que de segments du périmètre de longueur impaire allant d'une case grise à une case grise.

5

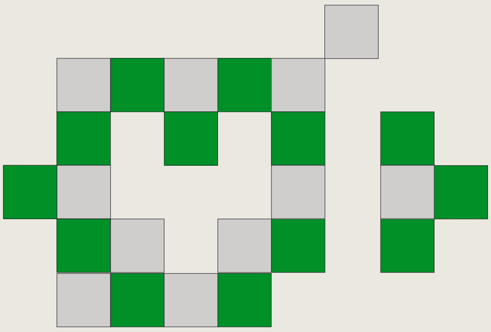



Attribution de poids compatibles avec un système orienté de poids pour les sommets extérieurs de la forme (g). Cette configuration permet de démontrer que la forme n'est pas dominable.

# 3

## UN LIEN ENTRE LE PÉRIMÈTRE ET L'INTÉRIEUR

**Un des plus simples et plus beaux résultats concernant les formes composées de carrés collés par leurs côtés – que nous appelons les « polygones orthogonaux » – est celui qui permet, en examinant les segments de longueur 1 du périmètre de la forme, d'en déduire des informations précises sur l'intérieur. L'énoncé est le suivant.**
**On suppose que le polygone orthogonal étudié est posé sur un damier à cases vertes et grises. On note $v$ le nombre de segments de longueur 1 composant le périmètre et bordant des cases vertes, et $g$ le nombre de tels segments bordant des cases grises. Alors $v - g$ est un multiple de 4, et $(v - g) / 4 = V - G$, où $V$ est le nombre de cases vertes de la forme et $G$ le nombre de cases grises. Le résultat est valable même si la forme comporte des trous ou est en plusieurs morceaux.**
**La démonstration est assez directe. Si on prend en compte les côtés des $V$ cases vertes de la forme, et les côtés des $G$ cases grises de la forme, le nombre de segments verts est $4V$ et le nombre de segments gris est $4G$. Il y a exactement autant de segments verts intérieurs (c'est-à-dire qui ne sont pas sur le périmètre) que de segment gris intérieurs, car chaque côté intérieur d'une case verte est collé à un côté intérieur d'une case grise. Soit $s$ ce nombre. Le nombre $4V - s$ est le nombre $v$ de segments verts du périmètre, et $4G - s$ est le nombre $g$ de côtés gris du périmètre. Donc : $v - g = (4V - s) - (4G - s) = 4(V - G)$.**
**Ce résultat possède deux conséquences intéressantes concernant les pavages par dominos.**

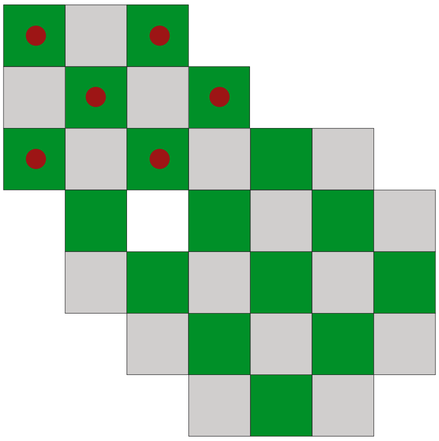


Nombre de carrés gris = 11
Nombre de carrés verts = 13

Nombre de bords gris du périmètre = 21
Nombre de bords verts du périmètre = 29

**(1) Si un polygone orthogonal est dominable, alors il contient autant de carrés gris que de carrés verts. D'après l'énoncé ci-dessus, son périmètre est donc composé d'autant de segments bordant des carrés verts que de segments bordant des carrés gris. On retrouve un résultat obtenu par la méthode des systèmes de poids orientés, mais ici il n'a pas été nécessaire de supposer que la forme étudiée est sans trou.**
**(2) Si un polygone orthogonal d'un seul tenant et sans trou n'a que des côtés de longueur impaire, alors tous ses côtés commencent par un vert et se terminent par un vert, ou tous ses côtés commencent par un gris et se terminent par un gris. Il n'a donc pas le même nombre de segments gris et verts sur son périmètre : $v - g \neq 0$. D'après le résultat ci-dessus, il n'a donc pas le même nombre de carrés gris et de carrés verts : $V - G \neq 0$. Il n'est par conséquent pas dominable. La condition « polygone d'un seul tenant et sans trou » est ici utile pour assurer que tous les côtés du périmètre ont une case verte à leurs extrémités, ou qu'ils ont tous une case grise.**

6



La méthode de Philip Hall permet de démontrer que cette forme n'est pas dominable. En effet, les six carrés verts marqués d'un point rouge sont en contact avec seulement 5 carrés gris. Cela empêche de paver la forme avec des dominos.

Malheureusement cela ne résout toujours pas le cas de la forme (g) de la figure 2, qui a autant de cases vertes que de cases grises et dont le périmètre parcouru en sens direct a autant de cases vertes que de cases grises à sa gauche. En fait, la méthode des systèmes orientés de poids sera tout de même mise à profit pour traiter ce cas, mais il faut être un peu plus astucieux.

## ENCORE MIEUX

Quand un domino est muni d'un système orienté de poids, la différence des nombres attribués aux deux sommets du segment qui sépare les deux cases du domino est toujours 3, c'est évident. Il en résulte que si deux sommets dans un système orienté de poids peuvent être joints par un chemin de longueur $k$ en suivant les bords des cases, alors les entiers attribués aux deux sommets ont des valeurs qui diffèrent au plus de $3k$. Or, comme le montre la figure 5, pour la forme (g), si on suit le périmètre en partant du point en bas au milieu, auquel on attribue la valeur 1, on est obligé d'attribuer la valeur 12 au point en haut au milieu. Il y a donc une différence de 11 entre les deux points. Pourtant, il existe un chemin vertical de longueur 3 les reliant. Comme $11 > 3 \times 3$, il n'existe pas de système orienté de poids pour cette forme, qui n'est donc pas dominable.

Pour un polygone orthogonal sans trou, identifier un pavage par dominos est équivalent à trouver un système orienté de poids. Or William Thurston a montré qu'on peut rechercher un tel système d'une façon dite «gloutonne», c'est-à-dire en avançant progressivement sans jamais reculer. On en a tiré des algorithmes assez efficaces qui indiquent rapidement si une forme polygonale sans trou est dominable ou non. Il s'agit là d'un sujet de recherche toujours très actif, comme en témoigne un article de 2023 de l'informaticien du MIT Anders Aamand.

L'impossibilité d'un pavage par dominos pour les formes sans trou dont tous les côtés ont des longueurs impaires peut être obtenue par une autre méthode, à la fois simple et très jolie (*voir l'encadré* 3). Celle-ci s'étend et permet d'aborder des cas où la forme qu'on étudie possède des trous et peut être éclatée en plusieurs composantes.

## AVEC DES TROUS

Un dernier résultat, dû au mathématicien britannique Philip Hall, facilite l'examen du cas de la forme (e) de la figure 2. Il ne fournit pas d'algorithme rapide pour déterminer si un polygone orthogonal est dominable ou non, mais il propose une caractérisation qui, dans le cas de la forme (e), va nous donner la possibilité de conclure.

On considère un sous-ensemble de $n$ cases vertes de la forme à laquelle on s'intéresse et on compte le nombre $b$ de cases grises de la forme qui sont collées aux cases de ce sous-ensemble. Si $b<n$, alors le polygone orthogonal n'est pas dominable car il n'y a pas assez de cases grises disponibles pour ces cases vertes. On a la même propriété en inversant les rôles des cases vertes et grises.

Il se trouve que cette condition suffisante pour démontrer qu'un polygone orthogonal n'est pas dominable est en fait nécessaire (ce qui n'est pas évident du tout). C'est le magnifique résultat général de Philip Hall: si, pour tout choix de $n$ cases vertes, le nombre $b$ associé vérifie $b \geq n$, et si le résultat est vrai aussi en inversant les rôles des cases vertes et grises, alors la forme considérée est dominable. Ainsi, si l'on échoue en essayant systématiquement de trouver des sous-ensembles de cases vertes ou de cases grises qui ne sont pas reliés à suffisamment de cases de couleur opposée, c'est que la forme est dominable.

Dans le cas de la forme (e) de la figure 2, cela nous donne également le résultat, car les six cases vertes en haut à gauche ne touchent que cinq cases grises. La forme (g) peut aussi être traitée par cette méthode, car les douze cases vertes les plus à droite ne touchent que onze cases grises. La méthode de Hall est très générale mais son application est délicate, car envisager tous les sous-ensembles de cases vertes et tous les sous-ensembles de cases grises est un travail qui croît exponentiellement vite. On l'utilisera pour disposer d'une preuve rapide qu'un polygone orthogonal n'est pas dominable, mais en pratique elle sera inutile pour prouver qu'une telle forme est dominable. ■


### BIBLIOGRAPHIE

**A. Aamand et al.**, Tiling with squares and packing dominos in polynomial time, *ACM Transactions on Algorithms*, 2023.

**J. Propp,** Conway's influence on the study of random tilings, *The Mathematical Intelligencer*, 2021.

**V. Gorin**, *Lectures on Random Lozenge Tilings*, Cambridge University Press, 2021.

**M. Alekhnovich,** Mutilated chessboard problem is exponentially hard for resolution, *Theoretical Computer Science*, 2004.

**J. Watkins,** *Across the Board : The Mathematics of Chessboard Poblems*, Princeton University Press, 2004.

**S. Dantchev et S. Riis,** *A tough nut for tree resolution,* BRICS Report, 2000.

**J. McCarthy,** *Creative solution to problem,* 1999.

**W. Thurston,** Conway's tiling groups, *The American Mathematical Monthly*, 1990.

**J. Conway et J. Lagarias,** Tiling with polyominoes and combinatorial group theory, *Journal of Combinatorial Theory*, 1990.

**R. Honsberger,** *Mathematical Gems I*, MAA Press, 1973.

**J. McCarthy,** A tough nut for proof procedures, Stanford Artificial Intelligence Project Memo, 1964.

**P. Hall,** On representative of subsets, *Journal of the London Mathematical Society*, 1935.