

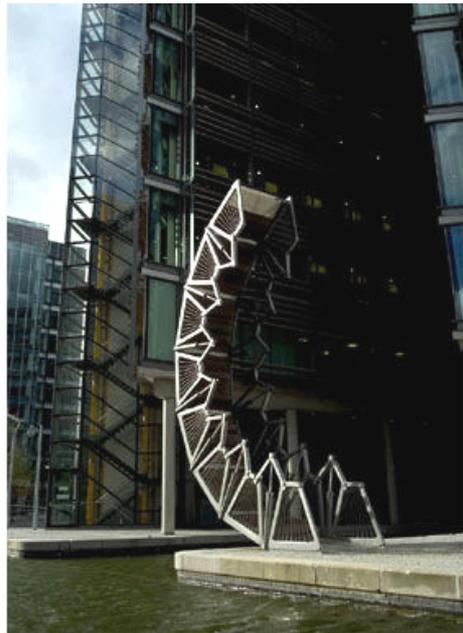


Présentation :

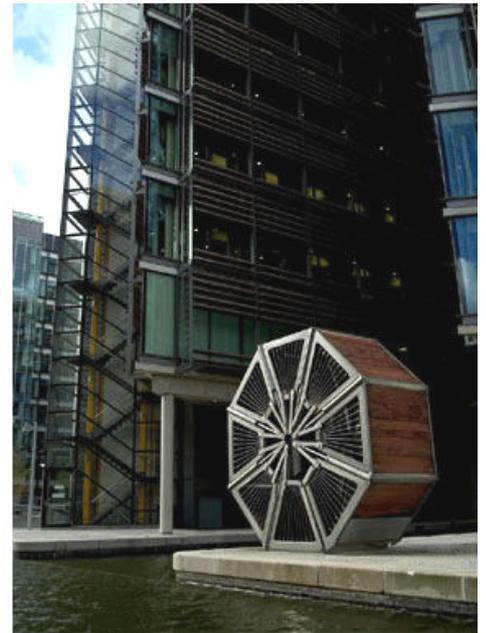
Le cabinet d'architectes *Thomas Heatherwick Studio* a conçu à Londres une passerelle afin de permettre aux piétons d'enjamber un des canaux du bassin de Paddington. Cette passerelle est mobile et elle porte le nom de "*Rolling Bridge*" car elle s'enroule en un octogone régulier et se déroule à la manière de la queue d'un scorpion (*runs every Friday at noon...*).



Passerelle dépliée.



en cours de mouvement.



et repliée.

La passerelle comporte 8 travées (1 travée fixe ancrée au sol et 7 travées articulées) dont le déplacement est obtenu par des vérins hydrauliques et des biellettes qui forment un quadrilatère déformable. Les biellettes font office de rambarde, une fois la passerelle dépliée (cf. photo ci-contre →).

La cinématique est celle d'un mécanisme plan, les actionneurs sont 14 vérins hydrauliques (7 paires entre chacune des 8 travées) commandés et asservis en position.



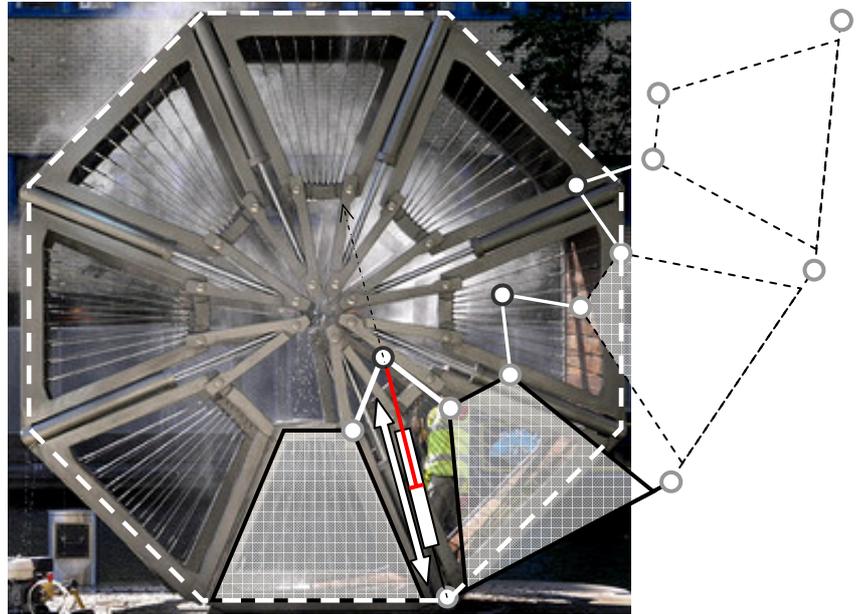
Principe de fonctionnement.

Le repliement de la passerelle (jusqu'à la position octogonale) se fait par l'élongation simultanée des 14 vérins hydrauliques (7 paires) qui permettent de faire basculer chacune des 7 travées mobiles articulées en série les unes par rapport aux autres.

Schéma cinématique et Paramétrage :

Afin de simplifier les calculs, on retient un modèle cinématique plan équivalent dont la géométrie est celle du schéma ci-dessous.

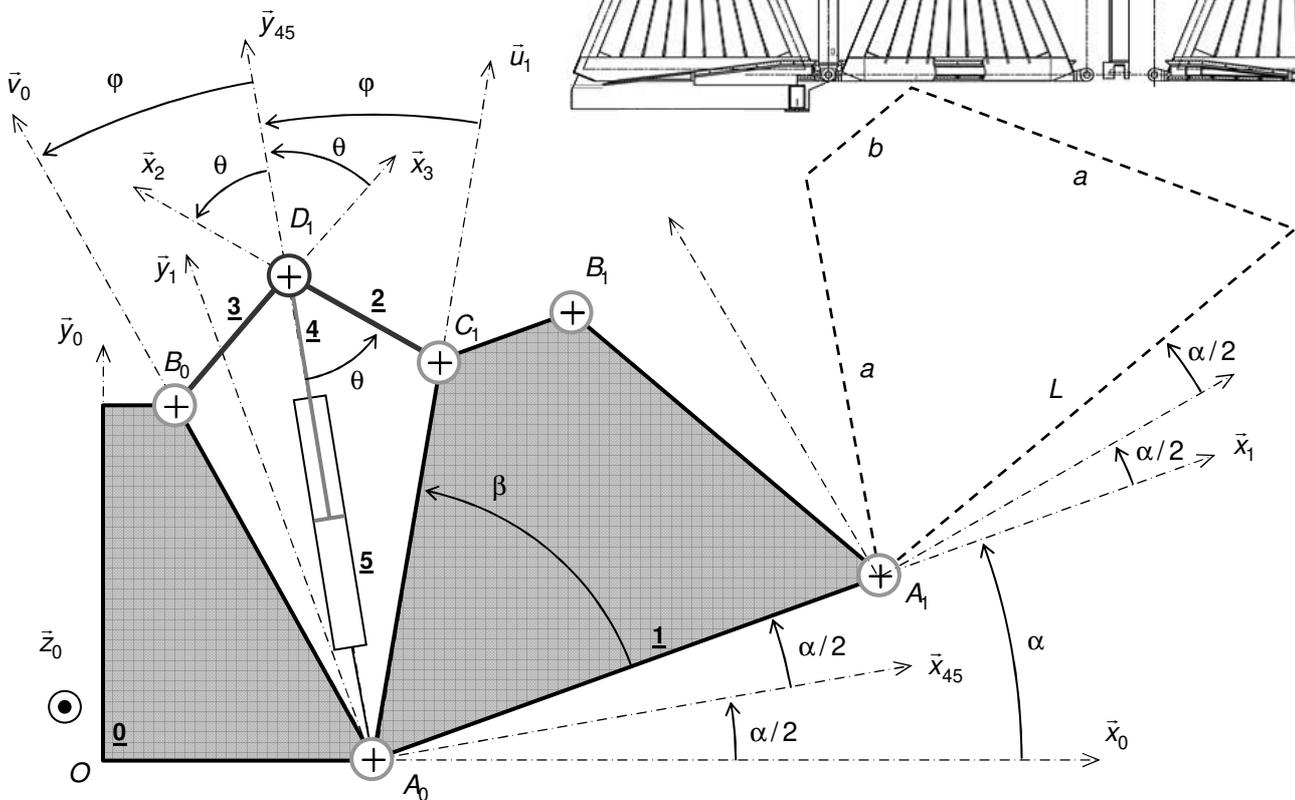
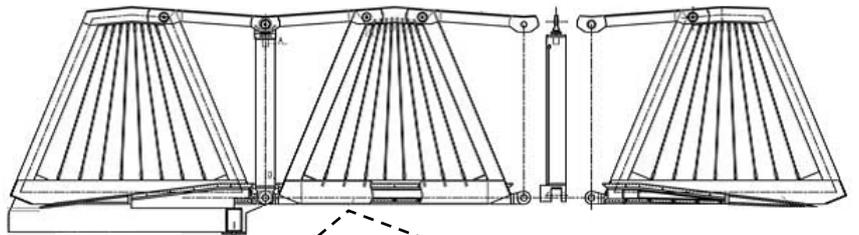
(les formes trapézoïdales du schéma ci-dessous ne correspondent plus alors exactement à celles de la structure réelle mais à celle d'un trapèze virtuel qui relie les points d'articulations des différentes pièces, cela facilite l'écriture du paramétrage)



On note $B_n(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_0)$ une base liée au solide \underline{n} et on note \bar{x}_{nm} un vecteur commun aux bases B_n et B_m .

On pose : $\frac{\alpha}{2} = (\bar{x}_0, \bar{x}_{45}) = (\bar{x}_{45}, \bar{x}_1)$, $\varphi = (\bar{u}, \bar{y}_{45}) = (\bar{y}_{45}, \bar{v})$, $\theta = (\bar{x}_3, \bar{y}_{45}) = (\bar{y}_{45}, \bar{x}_2)$ et $\beta = (\bar{x}_1, \bar{u}) \left[= 60^\circ = \frac{\pi}{3} \right]$, $Rq : \beta = cste$

$$\vec{A}_i \vec{B}_i = a \vec{v}_i, \vec{B}_i \vec{C}_i = -b \vec{x}_{1i}, \vec{C}_i \vec{D}_i = c \vec{x}_{2i}, \vec{B}_{i-1} \vec{D}_i = c \vec{x}_{3i}, \vec{A}_{i-1} \vec{A}_i = L \vec{x}_{1i} \text{ et } \vec{A}_{i-1} \vec{D}_i = \lambda(t) \vec{y}_{45i}.$$



Données Numériques :

$$a = 1.30 \text{ m}, c = 0.65 \text{ m}, L = 1.60 \text{ m} \text{ et } \beta = \frac{\pi}{3} \left[= 60^\circ \right]$$

A. Etude géométrique et cinématique du mécanisme de transformation de mouvement.

Préambule : Chacune des travées est mise en mouvement par un mécanisme identique (comportant un vérin 4-5 et deux biellettes 2 et 3), on raisonne donc uniquement sur le 1^{er} d'entre eux entre la travée **1** (mobile) et la travée **0** (fixe). On cherche la loi entrée-sortie de ce mécanisme sous la forme : $\lambda = f(a, c, \varphi)$.

A.1 Le paramétrage angulaire de la figure du schéma cinématique de la page précédente est-il fiable ? Justifier. Montrer rapidement que : $\alpha + 2\beta + 2\varphi = \pi$.

A.2 Quelle fermeture vectorielle simple proposez-vous d'écrire afin d'obtenir une relation de ce type (cf. préambule) ?

En faire un schéma en complétant l'ébauche de la figure proposée.

Mettre en œuvre cette stratégie par projection dans une base pertinente pour obtenir la relation souhaitée.

Compte-tenu de la relation trouvée en **A.1**, montrer que la loi entre-sortie pour le pilotage des vérins est finalement :

$$\lambda = a \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \pm \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \quad (E1).$$

A.3 La figure proposée sur le document réponse est le tracé de la courbe $\lambda(\alpha)$ qui satisfait l'équation (E1) dans l'intervalle $\alpha \in [-15^\circ, 135^\circ]$, identifiez la portion de courbe concernée par le mécanisme réel pour que le "Rolling Bridge" passe de la position horizontale (*dépliée*) à la position *octogonale* (*repliée*) en délimitant un rectangle encadrant la portion de courbe concernée et en indiquant $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ et leurs valeurs exactes (!).

A.4 A partir de la délimitation de la courbe que vous venez de faire :

a) Cette caractéristique est-elle linéarisable si on tolère 10% d'erreur au plus tout en conservant les points extrêmes ? (c'est-à-dire en ayant une approximation qui garde l'exactitude des positions "dépliée" et "repliée") Justifier votre réponse avec une construction graphique pertinente sur la figure.

b) Si on pilote tous les vérins avec une même vitesse $\dot{\lambda}_m$ supposée constante au cours du mouvement, le mouvement des travées de la passerelle se fera-t-il à vitesse de rotation constante ? (c'est-à-dire à $\dot{\alpha} = \text{cste}$)

c) Le temps d'un cycle (*ouverture ou fermeture*) est $T = 135$ (s).
Evaluer la vitesse moyenne de rentrée ou de sortie de tige du vérin $\dot{\lambda}_m$.

d) Toujours en supposant que les vérins fonctionnent à vitesse constante et à partir de la courbe $\lambda = F(\alpha)$, peut-on prévoir si il y aura choc lors de la fin d'enroulement (*repliement*) ou de déroulement (*dépliement*) ? Justifier.

Synthèse : Pour toute la suite, on admet disposer des relations suivantes :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{\alpha}{2} [2\pi], \quad \theta = \arcsin\left(\frac{a \sin \varphi}{c}\right) \quad \text{et} \quad \lambda = a \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$$

Etude de la cinématique des travées.

Afin de simplifier les notations, on re-numérote les solides en ne gardant que les 8 travées (numérotées de 0 à 7), telle que sur la figure ci-contre.

Dans le but de pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD, programme de 2^{nde} année) à chacune des travées, on se propose de déterminer, dans un premier temps, les vecteurs vitesse et accélération des différents centres de gravité des travées.

On complète le paramétrage par la position des centres de gravité, pour le premier (cf figure ci-dessous), on pose : $\vec{A}_0\vec{G}_1 = \frac{1}{2}L\vec{x}_1 + h\vec{y}_1$.

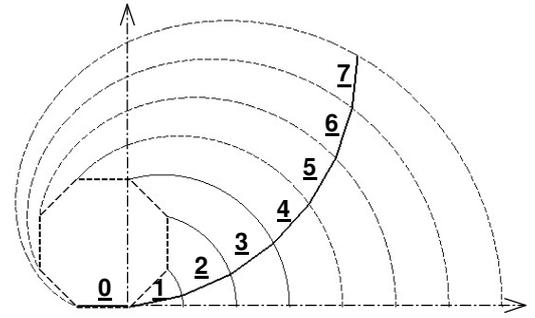


Illustration des trajectoires des points Ai.

Pour la suite, on recommande l'usage de la notation mathématique "somme" : $\sum_{k=m}^n$.

A.5 Vu le schéma ci-dessous, donner $\vec{\Omega}_{i/0}$ pour i quelconque.

A.6 Donner \vec{OG}_i pour i quelconque, sous la forme d'une somme.

En déduire $\vec{V}_{G_i/0}$.

indication : on laissera le résultat sous la forme d'une somme.

En déduire $\vec{\Gamma}_{G_i/0}$ (question plus calculatoire).

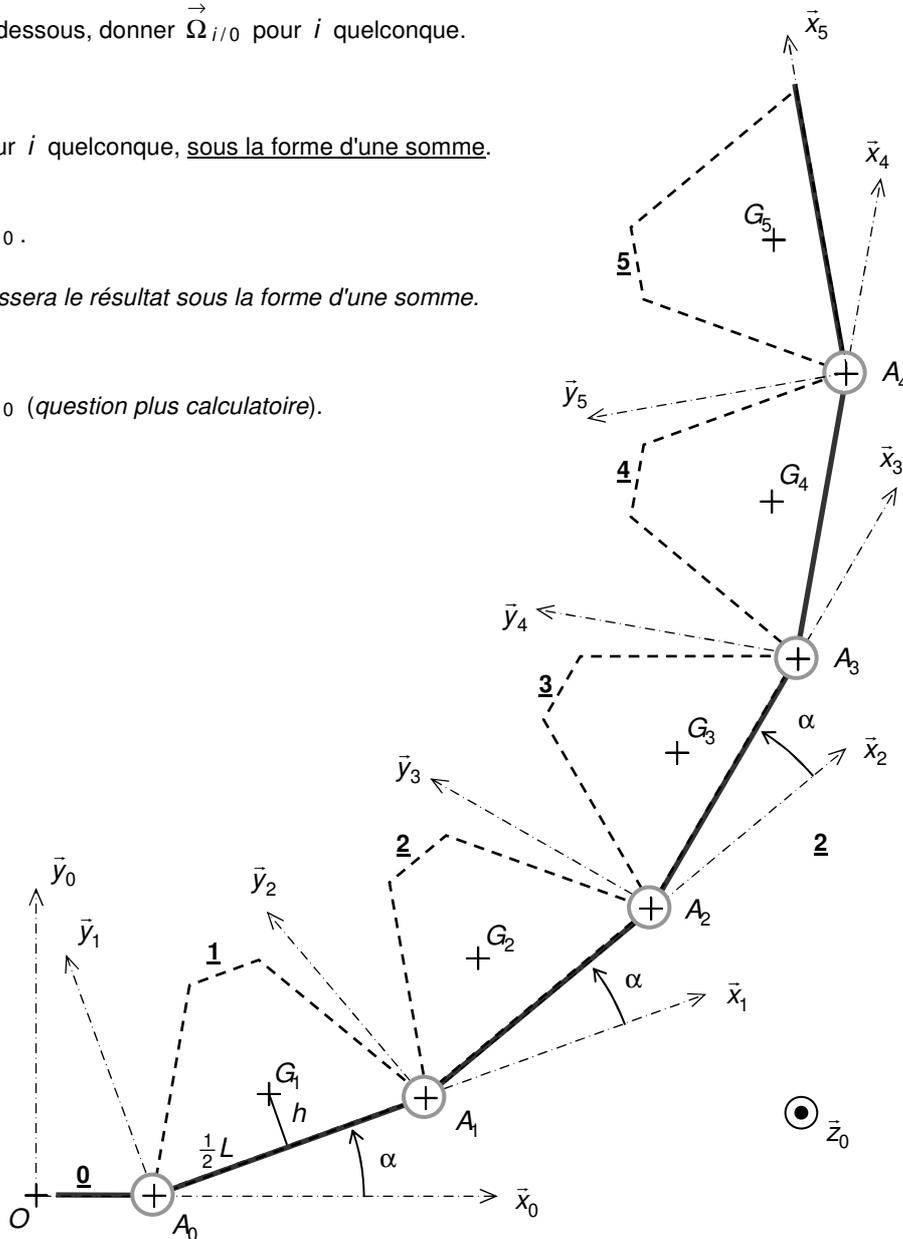


Schéma cinématique simplifié (seules les travées 0 à 5 ont été représentées).

B. Etude des efforts en quasi- statique.

Objectif :

Afin de correctement dimensionner les actionneurs (*vérins hydrauliques*) et les biellettes (*qui font office de rambarde*), il est impératif d'estimer l'intensité des actions mécaniques en jeu lors du déploiement de cette structure (de plus de 4 tonnes). La cinématique étant relativement lente ($2'15''=135$ secondes pour l'intégralité du mouvement), on peut se permettre de raisonner sur un problème de statique sans tenir compte des effets dynamiques, cela revient à négliger les quantités d'accéléérations face aux différents efforts (*pesanteur et actions de traction-compression dans les biellettes inter travées*).

Paramétrage :

Dans le schéma ci-contre, on note \underline{i} (variant de 0 à 7) les travées, et $\underline{2i}$, $\underline{3i}$, $\underline{4i}$, $\underline{5i}$ les autres solides (*biellettes, tiges et corps des vérins*).

Données Numériques :

$$a = 1.30 \text{ m},$$

$$c = 0.65 \text{ m},$$

$$\beta = \frac{\pi}{3} [= 60^\circ],$$

$$h = 0.25 \text{ m},$$

$$L = 1.60 \text{ m},$$

$$m_i = 560 \text{ kg}.$$

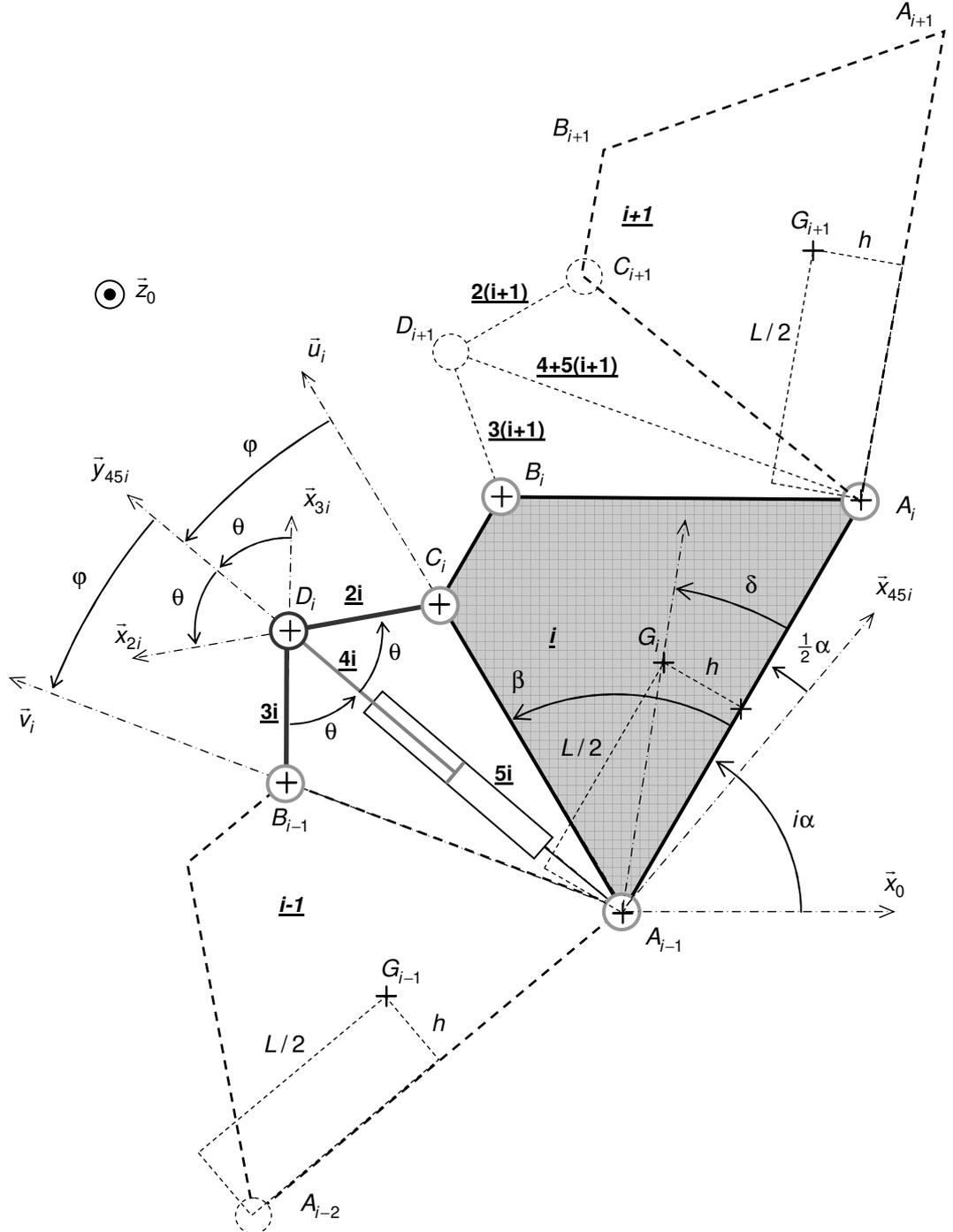
Relations supplémentaires:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{\alpha}{2} [2\pi]$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{a \sin \varphi}{c}\right)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{2h}{L}\right)$$

$$\lambda = a \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$$



Pour éviter toute ambiguïté dans la dénomination des actions mécaniques, on adopte la convention suivante, on note :

- T_{2i} , la tension/compression interne subie par la biellette **2i**,
(avec pour convention : $T_{2i} < 0$ si la biellette est en traction, $T_{2i} > 0$ si la biellette est en compression).
- T_{3i} , la tension interne subie par la biellette **3i** (avec la même convention que précédemment),
- F_{Vi} , la poussée/traction qu'exerce le vérin sur le nœud D_i (point d'articulation entre **2i**, **3i** et **4i**),
(avec pour convention : $F_{Vi} > 0$ si le vérin exerce une poussée suivant \vec{y}_{45} , $F_{Vi} < 0$ si le vérin exerce une traction).

B.1 Si on isole le nœud D_i , (c'est-à-dire l'axe d'articulation et que l'on suppose ce nœud assimilable à un "solide", où sont articulées et convergent les biellettes (**2i**, **3i**) et la tige **4i** du vérin (**4i** + **5i**), et que l'on suppose que le système est en équilibre quasi-statique

- peut-on prédire les directions des efforts qu'exercent ces pièces sur le nœud D_i ? Justifier.
- peut-on déterminer des relations simples entre ces efforts ?

Etayer votre raisonnement par une figure (faire un choix arbitraire d'une situation pour laquelle $T_{2i} > 0$ ou $T_{2i} < 0$)
Faire particulièrement attention aux signes !

Les seules AME connues sont les AM de pesanteur qui s'appliquent sur chacune des travées.

On suppose que l'étude géométrique a été menée, on connaît donc complètement les paramètres géométriques pour une position α donnée, c'est-à-dire que l'on connaît les positions de tous les points, en particulier leurs abscisses et ordonnées dans $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

B.2 Si on décide de n'isoler qu'une seule travée (n° **i**), quelle travée a-t-on intérêt à isoler en premier pour que l'écriture du PFS (*Principe Fondamental de la Statique*) fasse apparaître le minimum d'inconnues statiques extérieures ?

Parmi les équations utiles du PFS, quelle est celle qui permettra d'obtenir directement la tension T_{2i} ?
Justifier en complétant le schéma proposé sur le document réponse en faisant apparaître les bras de levier considérés.

Quels isolements proposer par la suite pour poursuivre avec cette même stratégie ?
(à savoir faire apparaître le minimum d'inconnues de liaisons à chaque étape)

Objectif :

La stratégie précédente est très lourde à mettre en œuvre analytiquement, mais elle est se prête bien à une mise en œuvre informatique (par exemple avec Python). Le fichier ST1-TP-RollingBridge_vELEVE.py contient la plupart des définitions nécessaires à la mise en œuvre directe de la stratégie normalement élaborée ci-avant, à vous de jouer !



Pour homogénéiser les notations, on décide de noter sous la forme d'éléments d'une liste de liste (ou tableau) :

- les efforts T_{2i} et T_{3i} (dont on a normalement démontré l'égalité en valeur algébrique),
- les efforts de poussé des vérins F_{Vi} ,

Pour obtenir les efforts pour une position angulaire quelconque, on décide de discrétiser les positions avec n_P positions discrètes équiréparties sur l'intervalle $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$.

Ainsi, on propose de stocker dans des tableaux Tb et Fv, à 2 dimensions chacun, les efforts des biellettes et des vérins, on adopte alors la convention suivante :

Tb[*i*, *j*], désigne la tension/compression des biellettes **2i** ou **3i** du module **i**, pour la position angulaire *j*,

Fv[*i*, *j*], désigne la poussée/traction du vérin **4i** -**5i** entre les modules **i-1**, et **i**, pour la position *j*.

C.1 Mettre en œuvre votre stratégie sous Python à partir du fichier : ST1-TP-RollingBridge_vELEVE.py.

Pour cela, on propose de suivre les étapes proposées ci-après :

a)

construction d'une liste/tableau/vecteur Alpha comportant n_P valeurs d'angles $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$ équi-réparties, et construction des listes/tableaux/vecteurs Phi, Theta, Lambda correspondantes respectivement aux valeurs discrètes de : (φ, θ, λ) et comportant toutes n_P valeurs,

b) (cf. aide sur le format de données adoptée en page suivante)

construction des 5 listes de listes de listes ou tableaux de dimensions 3 contenant les coordonnées des points (A,B,C,D,G) avec la convention de numérotation : P[*i*, *j*, *k*], désigne la $k^{\text{ième}}$ coordonnées du point *P* de la travée *i* pour la position *j*, ($k = 0$ pour la coordonnée en abscisse et $k = 1$ pour celle en ordonnée),

Remarque 1 :

avec ce principe de numérotation, les valeurs contenues dans les portions P[0, :, 0/1:] pour $P \in (A,B,C,G)$ sont identiques puisque les points (A,B,C,G) de la travées n^0 sont fixes.

Remarque 2 :

pour des raisons similaires, les valeurs contenues dans la portion D[0, :, :] ne correspondent à rien, car le point *D* n'existe pas pour la travée n^0 .

Exécuter votre script et vérifier ainsi votre travail en constatant la pertinence des animations qui sont automatiquement générées à chaque exécution.

C.2 Dernière étape :

c)

construction de la liste de liste ou tableau Tb de taille ($8 \times n_P$) comportant les valeurs de tensions des biellettes, en déduire simplement l'obtention du tableau Fv associé.

Vérifier vos résultats avec ceux donnés en annexe....

indication: après définition, le tracé des courbes est automatisé.

D. Synthèse, vérification rapide.

- D.1** Pouvez-vous justifier rapidement que les courbes d'efforts (T_{b-7}, F_{V-7}) s'annulent par deux fois lors de la manœuvre ?
Il n'est pas inutile de se référer à l'animation générée par l'exécution du script Python.
- D.2** Retrouver rapidement par un raisonnement graphique simple la valeur du maximum de tension observée dans les biellettes 2-3 du module 1 pour la position dépliée $\alpha = 0^\circ$. (*le module 2 n'est pas encore en contact avec le sol*)

Format de la structure des données.

On donne ci-dessous une illustration du format de la structure des données adoptées pour la construction des 5 tableaux de dimensions 3 contenant les coordonnées des points (A, B, C, D, G) avec la convention :

$P[i, j, k]$, désigne la $k^{\text{ième}}$ coordonnées du point P de la travée i (ligne) pour la position j (colonne),
($k = 0$ pour la coordonnée en abscisse et $k = 1$ pour celle en ordonnée),

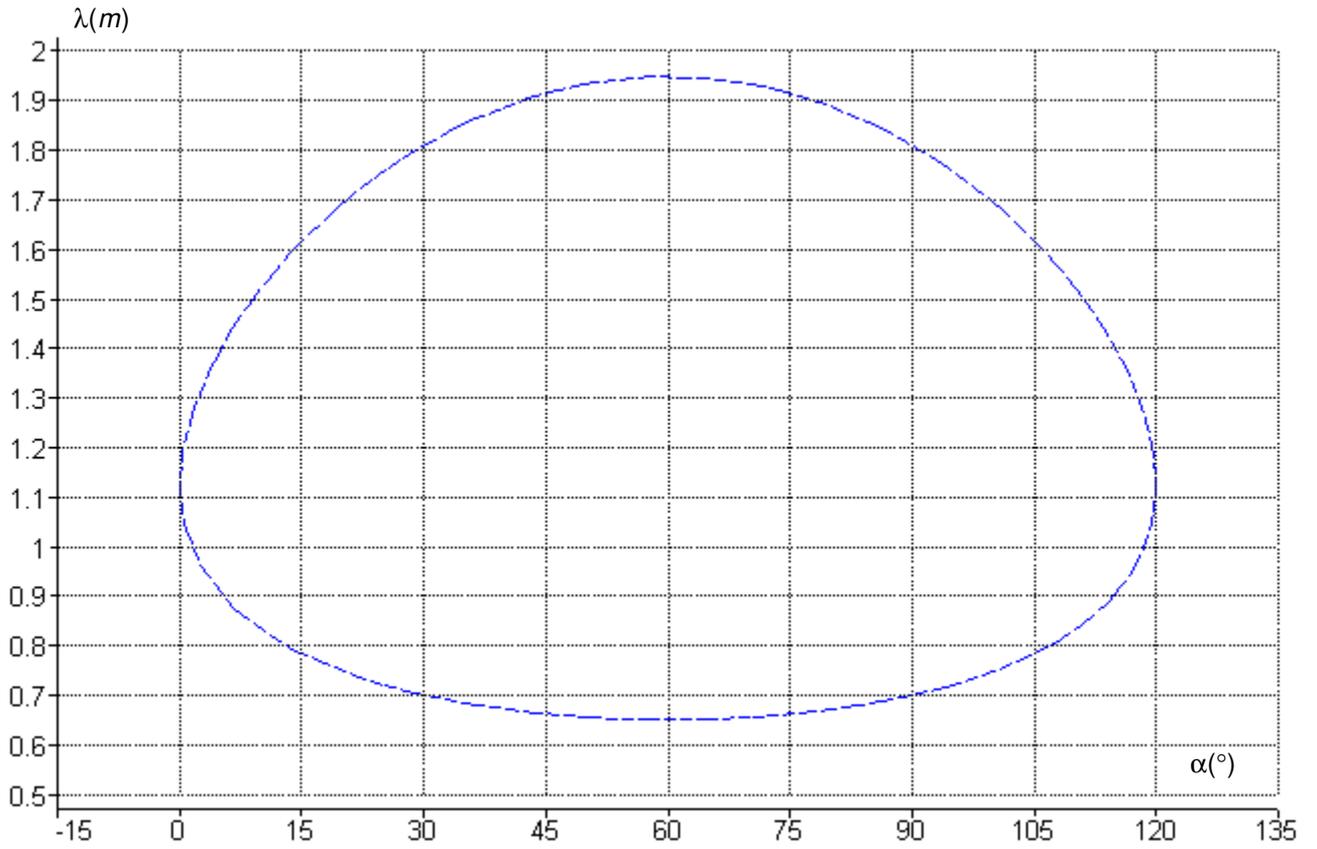
$\downarrow j^{\text{ième}} \text{ colonne}$

```
P = np.array([ [ [ , ], [ , ], ... , [ , ] ],  
              [ [ , ], [ , ], ... , [ , ] ] ],  
             iième ligne → [ [ , ], [x, y], .. , [ , ] ],  
              [ [ , ], [ , ], ... , [ , ] ] )
```

*Coordonnées cartésiennes du point P
de la $i^{\text{ième}}$ travée lors de la $j^{\text{ième}}$ position*

Remarque : chaque composante du tableau (de dimension 2) est une liste de 2 valeurs, le tableau est donc un tableau de dimension 3.

A.3 Solution de l'équation : $\lambda = a \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \pm \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$ ci-dessous :



A.4 a)

b)

c)

d)

B. Stratégie de détermination des efforts.

B.1

