Exercice 1

1. $\cos(a+b) =$ $\qquad$ $\cos(a-b) =$
2. Vérifier que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
3. $\sin(a+b) =$
4. Obtenir une formule pour $\cos(n\pi), \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer pour $a \geqslant b \geqslant 0$ que

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}$$

6. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6) \qquad B = 5^0 \times e^{(2\ln(5))} \qquad C = \frac{\ln(3^5)}{\ln(3)} \qquad D = (-1)^{10}\,\frac{e^3 - e^5}{e^3 + e^4}$$

7. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$, calculer $f'(x)$; On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = f'(x)$, calculer $g'(x)$.
8. Discuter et résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x}$
9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax+b}$, $x \mapsto sin(ax+b)$ et $x \mapsto cos(ax+b)$.
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$$

Exercice 2

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant là où elles sont dérivables

(a) $x \mapsto \sqrt{1-x}$

(b) $x \mapsto (1-x)e^{(-x^2)}$

(c) $x \mapsto e^{(-e^{-x})}$

(d) $x \mapsto -\ln(1-x)$

2. Déterminer les limites suivantes (si elles existent)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \text{ (on pourra utiliser la forme conjuguée)} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln(x)e^{-5x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)e^{-5x}$$

3. Déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $-2e^{2x} + 8e^x$
4. Déterminer, pour tout x de $]0; +\infty[$, le signe de $5\left(\ln(x)\right)^2 - 10\ln(x) + 5$
5. Résoudre l'équation

$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{4x-2}{x-5} = 5$$

6. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$
7. Mettre sous forme de quotients avec un dénominateur rationnel les quantités

(a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$

(c) $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} =$

(d) $\frac{3+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}} =$

8. Simplifier l'expression

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Exercice 3
Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.
On désigne par

S_1 : l'événement « la 1re balle de service est « bonne » » ;
S_2 : l'événement « la 2e balle de service est « bonne » » ;
G : l'événement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :
- sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40% des cas ;
- sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95% des cas ;
- si sa première balle de service est jugée « bonne » , il gagne l'échange dans 80% des cas ;
- si sa deuxième balle de service est jugée
og bonne » , il gagne l'échange dans 60% des cas.

Pour tout événement A on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Calculer $p(S_1 \cap G)$.
2. Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de $0,662$.
3. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.
4. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs, ces échanges étant supposés indépendants. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 4
1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $(x-1)(1-3x) < 0$.
2. Calculer l'intégrale suivante $\int_0^\pi \cos(2x)\,dx$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} < \dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x+3}{x+1} \end{cases}$$
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$, en déduire une expression de $\cos(9t)$ en fonction de $\cos(t)$.
5. Étudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$.
Représentation graphique du graphe de f.
6. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$$
7. Résoudre l'équation $(x-5)(x-7)+(x-5)^2 = 0$.
8. Résoudre le système
$$\begin{cases} x+y = 15 \\ x^2+y^2 = 153 \end{cases}$$
(On pourra remarquer que $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$)
9. Résoudre les équations suivantes
$$\ln(x)+\ln(x-1) = \ln(6) \qquad \ln(x-2)+\ln(x+2) = \ln(x+8))$$
10. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans le cas où $3u_{n+1} = 2u_n + 3$, $u_0 = 4$. On commencera par déterminer α tel que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique.

Exercice 5
On note pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{1+e^x}$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les asymptotes éventuelles du graphe de f.
3. Tracer le graphe de f.
4. Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que pour tout couple de points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ le point de coordonnées $I(0; 1 + \ln(4))$ est le milieu du segment $[MM']$. Quelle interprétation graphique pour le graphe de f cette propriété peut-elle avoir ?
5. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.

Exercice 6
Une urne contient 10 boules blanches et 2 noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche. On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Calculer la valeur de $P[X = 1]$.
   (c) Montrer que $P[X = 2] = \frac{5}{33}$
   (d) Calculer $P[X = 3]$.
2. Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.
3. Calculer $E\left(X^2\right)$ et en déduire que $V(X) = \frac{65}{363}$

Exercice 7
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
   (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1. En déduire que la limite de $(I_n)_n$ est 0.
2. Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.
   (a) Calculer w_0 et w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \cos^{n+1}(t)\sin(t)$. Calculer f_n' puis en déduire que
   $$w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \sin^2 t \, dt$$
   (e) En déduire : $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
   (f) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. Déterminer cette constante.

Exercice 8
Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\theta)} \cos(\theta) \, d\theta \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2(x)} \, dx$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^3 + 3x}{x^4 + 6x^2 + 5} dx \qquad \int_0^3 \frac{x^2}{x+3} dx \text{ (on pourra remarquer que } x^2 = (x^2 + 3x) - (3x + 9) + 9\text{)}$$