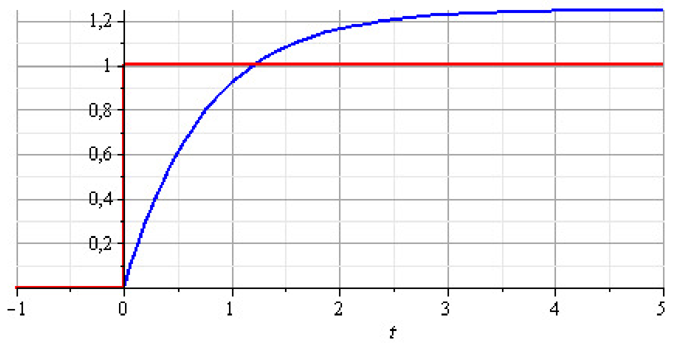
4. Résolution d'équations différentielles

1. $4s(t)+3\dfrac{ds(t)}{dt}=5e(t) \rightarrow 4S(p)+3pS(p)=5E(p)$, soit : $\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{5}{4+3p}$, forme canonique : $\boxed{\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{5/4}{1+3/4p}}$

Si $e(t)=u(t)$, alors : $E(p)=\dfrac{1}{p}$ et donc : $\boxed{S(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{5}{4+3p}}$ que l'on décompose en : $\boxed{S(p)=\dfrac{5/4}{p}+\dfrac{15/4}{4+3p}}$

qui se réécrit : $S(p)=\dfrac{5}{4}\dfrac{1}{p}+\dfrac{5}{4}\dfrac{1}{4/3+p}$ afin d'être utilisable avec les tables de tables de transformées inverses.

Il vient ainsi : $\boxed{s(t)=\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4}e^{-\frac{4}{3}t}}$. L'allure des courbes est donnée ci-dessous :



2. $s(t)+\dfrac{ds(t)}{dt}=e(t) \rightarrow S(p)+pS(p)=E(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{1+p}}$.

Avec $e(t)=2t\cdot u(t)$, on a : $E(p)=\dfrac{2}{p^2}$ et donc : $S(p)=\dfrac{2}{p^2}\dfrac{1}{1+p}=\dfrac{a}{p^2}+\dfrac{b}{p}+\dfrac{c}{1+p}=\dfrac{2}{p^2}-\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{1+p}$,

qui donne, en consultant les tables de transformées inverses : $\boxed{s(t)=u(t)(2t-2+2e^{-t})}$.

3. $s(t)+2\dfrac{ds(t)}{dt}+\dfrac{d^2s(t)}{dt^2}=e(t)\rightarrow S(p)+2pS(p)+p^2S(p)=E(p)\rightarrow \boxed{\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{1+2p+p^2}}$,

on reconnaît un carré parfait, soit : $\boxed{\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{(1+p)^2}}$.

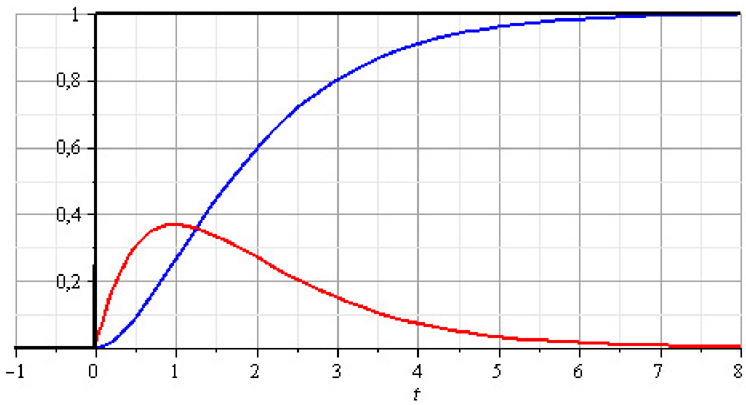
La recherche de $s(t)$ se fait par détermination de la transformée inverse de $S(p)$.

Or, avec $e(t)=u(t)$, on a : $E(p)=\dfrac{1}{p}$ et donc : $S(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{(1+p)^2}=\dfrac{a}{(1+p)^2}+\dfrac{b}{1+p}+\dfrac{c}{p}=\dfrac{-1}{(1+p)^2}+\dfrac{-1}{1+p}+\dfrac{1}{p}$,

qui donne, en consultant les tables de transformées inverses : $\boxed{s(t)=u(t)(1-e^{-t}-te^{-t})}$ et $\boxed{\dot{s}(t)=te^{-t}}$.

Remarque : $\dot{s}(t)=\dfrac{d\,s(t)}{dt}$ présente un maximum lorsque $\dfrac{d^2\,s(t)}{dt2}$ s'annule, soit $e^{-t}-te^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}(1-t)=0$,

ce qui se produit pour $t=1s$, ce maximum vaut : $e^{-1}=0{,}368$



4. $\dfrac{ds(t)}{dt}+\dfrac{d^3s(t)}{dt^3}=e(t)\rightarrow pS(p)+p^3S(p)=E(p)\rightarrow \boxed{H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{p+p^3}}$

Pour $e(t)=u(t)$, $E(p)=\dfrac{1}{p}$, ainsi : $S(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{p+p^3}=\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1}{1+p^2}$ qui est de la forme : $S(p)=\dfrac{\alpha}{p^2}+\dfrac{\beta}{p}+\dfrac{\gamma}{1+p^2}$.

Par identification, on obtient : $S(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{1+p^2}$, et donc : $\boxed{s(t)=t-\sin(t)}$, $s(t)$ diverge, puisque : $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=+\infty$,

résultat que le théorème de la valeur finale confirme : $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=\lim\limits_{p\to 0} p.S(p)=\lim\limits_{p\to 0}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{1+p^2}\right)=+\infty$