NOM :
Prénom :

Mardi 05 Mars 2024

Interrogation 18

Polynômes 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Division euclidienne polynomiale.
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq$. Alors $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(B)$ et $A = BQ + R$. Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

2. Formule de Taylor polynomiale.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors
$$\forall a \in \mathbb{K},\ P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

3. Définition degré d'un polynôme.
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Si $P \neq 0$, on définit le degré de P, noté $\deg(P)$, par $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\}$ (le plus grand indice des coefficients non nuls de P). Et si $P = 0$, on note $\deg(P) = -\infty$.

4. Degré d'une somme de polynômes.
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\deg(P, Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Et $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q)) \iff \deg(P) = \deg(Q)$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P) + \operatorname{coeff\,dom}(Q) = 0$.

5. Listes des polynômes inversibles.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P \in \mathbb{K}[X]^\times \iff \deg(P) = 0$. Autrement dit $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$.

6. Définition d'une racine d'un polynôme.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P, si et seulement si, $\widetilde{P}(a) = 0$.

7. Définition d'une famille de polynômes échelonnée en degré.
Soit $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degré si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$.

8. Définition du polynôme dérivé.
Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivée de P, noté P', par $P'(X) = 0$ si $\deg(P) \leq 0$ et $P'(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$ si $\deg(P) \geq 1$.

Exercice 2 :
Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n(X) = X^n + (X+1)^n + (X+2)^n$ par $B(X) = X^3 - X$.

$B \neq 0$ donc on peut faire la division euclidienne de P_n par B. Par définition de la division euclidienne, $\exists Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_n = Q_n B + R_n$ et $\deg(R_n) < \deg(B) = 3$. Donc $\exists a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

Or B a trois racines distinctes, qui sont $0, 1, -1$. Et donc, par évaluation polynomiale,

$$\begin{cases} \widetilde{P_n}(0) = \widetilde{Q_n}(0)\widetilde{B}(0) + c_n \\ \widetilde{P_n}(1) = \widetilde{Q_n}(1)\widetilde{B}(1) + a_n + b_n + c_n \\ \widetilde{P_n}(-1) = \widetilde{Q_n}(-1)\widetilde{B}(-1) + a_n - b_n + c_n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2^n = c_n \\ 1 + 2^n + 3^n = a_n + b_n + c_n \\ 1 + (-1)^n = a_n - b_n + c_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 + 2^n = c_n \\ 3^n = a_n + b_n \\ (-1)^n - 2^n = a_n - b_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_n = 2^n + 1 \\ a_n = \frac{3^n - 2^n + (-1)^n}{2} \\ b_n = \frac{3^n + 2^n - (-1)^n}{2} \end{cases}$$

D'où $R_n(X) = \frac{3^n - 2^n + (-1)^n}{2} X^2 + \frac{3^n + 2^n - (-1)^n}{2} X + 2^n + 1$.