NOM :
Prénom :

Mardi 19 Mars 2024

Interrogation 20

Fractions Rationnelles

Correction

Exercice 1 :

Décomposer en éléments simples la fractions rationnelle $F(X) = \frac{X^6+X^4-2X^3+2X^2-4X+2}{X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Première méthode : Dans $\mathbb{R}(X)$:

1 est racine évidente du numérateur et dénominateur de F. Donc

$$F(X) = \frac{(X-1)(X^5+X^4+2X^3+2X-2)}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{X^5+X^4+2X^3+2X-2}{(X-1)(X^2+1)^2}$$

On effectue la division euclidienne :

$$X^5+X^4+2X^3+2X-2 = (X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1)+2X^4+2X^2+X-1.$$

Donc

$$F(X) = 1 + \frac{2X^4+2X^2+X-1}{(X-1)(X^2+1)^2}.$$

On pose $G(X) = \frac{2X^4+2X^2+X-1}{(X-1)(X^2+1)^2}$. Alors, par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, $\exists!(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$, tel que

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}.$$

Alors

$$a = \widetilde{((X-1)G)}(1)$$

et

$$(X-1)G(X) = \frac{2X^4+2X^2+X-1}{(X^2+1)^2}.$$

Donc $a = \frac{4}{4} = 1$.

De plus, $(X^2+1)^2G(X) = \frac{a(X^2+1)^2}{X-1} + (bX+c)(X^2+1) + dX + e = \frac{2X^4+2X^2+X-1}{X-1}$. Donc

$$\begin{cases} di + e = \widetilde{((X^2+1)^2G)}(i) = \frac{2-2+i-1}{i-1} = 1 \\ -di + e = \widetilde{((X^2+1)^2G)}(-i) = \frac{2-2-i-1}{-i-1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Et

$$\frac{aX}{X-1} + \frac{bX^2+cX}{X^2+1} + \frac{dX^2+eX}{(X^2+1)^2} = XG(X) = \frac{2X^5+2X^4+X^2-X}{(X-1)(X^2+1)^2}$$

Donc

$$x\widetilde{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2 \qquad \text{et} \qquad x\widetilde{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a+b.$$

Donc, par unicité de la limite, $a+b=2$ et donc $b=1$.

Enfin $1 = \widetilde{G}(0) = -a+c+e$. Donc $c=1$.

D'où

$$F(X) = 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

Deuxième méthode : Dans $\mathbb{C}(X)$:

On reprend $F(X) = 1 + G(X)$, avec les notations précédentes. On va faire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. Donc, $\exists a,b,c,d,e \in \mathbb{C}$ tel que

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{(X+i)^2} + \frac{d}{X-i} + \frac{e}{(X-i)^2}.$$

On retrouver alors $a = 1$. Puis $c = \widetilde{((X+i)^2 G)}(-i)$. Or

$$(X+i)^2 G(X) = \frac{2X^4 + 2X^2 + X - 1}{(X-1)(X-i)^2}.$$

donc $c = \frac{2-2-i-1}{(-i-1)(-2i)^2} = -1/4$.

De même, $e = \widetilde{((X-i)^2 G)}(i)$. Or

$$(X-i)^2 G(X) = \frac{2X^4 + 2X^2 + X - 1}{(X-1)(X+i)^2}.$$

Et donc $e = -1/4$.

Puis,

$$x\widetilde{G}(x) = \frac{2x^5 + 2x^3 + x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2, \qquad x\widetilde{G}(x) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{x+i} + \frac{cx}{(x+i)^2} + \frac{dx}{x-i} + \frac{ex}{(x-i)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a+b+d.$$

Donc, par unicité de la limite, $2 = a + b + d$. Et donc $b + d = 1$.

De plus, $1 = \widetilde{G}(0) = -a - bi - c + di - e$. Donc $d - b = -3i/2$. Donc

$$\begin{cases} b + d = 1 \\ d - b = -\frac{3i}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{2} + \frac{3i}{4} \\ d = \frac{1}{2} - \frac{3i}{4} \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
F(X) &= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{3i}{4}}{X+i} - \frac{1}{4(X+i)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3i}{4}}{X-i} - \frac{1}{4(X-i)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{4}\right)(X-i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{4}\right)(X+i)}{(X+i)(X-i)} - \frac{(X+i)^2 + (X-i)^2}{4(X+i)^2(X-i)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X + 3/2}{X^2+1} - \frac{X^2 - 1}{2(X^2+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X + 3/2}{X^2+1} - \frac{X^2 + 1 - 2}{2(X^2+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X + 3/2}{X^2+1} - \frac{1/2}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X + 1}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Et on retrouve la décomposition en éléments simples de la première méthode.