NOM :
Prénom :

Mardi 26 Mars 2024

Lycée Loges

Interrogation 21

Analyse Asymptotiques - DL

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Formule de Taylor-Young.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. Alors $\forall a \in I$, f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

2. DL et dérivés.
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$, $a \in I$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, et f' admet également un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$, alors $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=1}^{n} ka_k(x-a)^{k-1} + o((x-a)^{n-1})$.

3. Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité par les DL.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est continue en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+o(1)$. f est dérivable en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\kappa(x-a)+o(x-a)$. Dans ce cas, $\kappa = f'(a)$.

4. DL et primitives.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ et si f admet une primitive F sur I, alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ de la forme $F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1})$.

5. $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\sin$.
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

6. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\exp$
$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0} n\frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$.

7. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$
$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}x^k + o(x^n)$.

8. $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\arctan$.
$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

Exercice 2 :
Calculer le $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-1)}$.

On pose $h = x-2 \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\ln(x-1) = \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

et

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi h + 2\pi) = \sin(\pi h) \underset{h\to 0}{=} \pi h - \frac{\pi h^3}{6} + o(h^3)$$

Alors

$$\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-1)} = \frac{\sin(2\pi h)}{\ln(1+h)}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\pi h - \frac{\pi^3}{6}h^3 + o(h^3)}{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)}{1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}h^2 + o(h^2)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h^2\right) + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}h + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)h^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi^3}{6}\right)h^2 + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \frac{\pi(1+2\pi^2)}{12}h^2 + o(h^2) \\
&\underset{x\to 2}{=} \pi + \frac{\pi}{2}(x-2) - \frac{\pi(1+2\pi^2)}{12}(x-2)^2 + o((x-2)^2).
\end{aligned}
$$