NOM :
Prénom :

Mardi 02 Avril 2024

Interrogation 22

Matrices

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition du produit matriciel.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors on peut définir le produit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq q}}$ où
$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,q\},\ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}.$$

2. Produit d'une matrice par une colonne.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A)$.

3. Définition d'une transposée.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, notée ${}^tA$, par ${}^tA = (a'_{j,i})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall j \in \{1,\dots,p\},\ a'_{j,i} = a_{i,j}$.

4. Produit des matrices élémentaires.
Soit $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,p\}$, $k \in \{1,\dots,p\}$, $\ell \in \{1,\dots,q\}$. Alors $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

5. Caractérisation des matrices diagonales inversibles.
Soit $D = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_i \neq 0$. Et donc dans ce cas, $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_n})$.

6. Définition des matrices symétriques et antisymétriques.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite symétrique si $A = {}^tA$. Et A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

7. Définition d'une matrice triangulaire inférieure.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A triangulaire supérieure si $\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ i < j \implies a_{i,j} = 0$. On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

8. Propriétés algébriques de la trace.
La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de plus, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 2 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + A - I_3$. En déduire $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et donner A^{-1}.

Le calcul montre
$$A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -8 \\ 16 & 29 & 22 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 6 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc $A^3 - 3A^2 + A - I_3 = 4I_3$. Donc $A(A^2 - 3A + I_3) = 5I_3$. Et donc A est inversible à droite. Or A est une matrice carré. Donc $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et
$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + \frac{1}{5}I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & -8/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$