DS 9
Analyse Asymptotique - Matrices

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 3 Avril 2024

Problème 1 (Analyse) :

Partie 1 : Étude de fonction

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

On admet (pour le moment) le théorème suivant :

Théorème 0.1

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$, alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \beta$.

1. Tout d'abord, par composition d'applications, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ ($\cos$ définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\cos(y) \underset{y\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + o(y^{2n})$$

par développement de référence. Donc

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} + (x^n).$$

On a donc bien, par définition, un développement limité à l'ordre n de f en 0.

2. (a) Par composée d'applications continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après la question précédente, on a

$$\cos(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Donc,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} -1/2 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2.$$

Donc, par définition, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$.

De plus, on a $(x \mapsto \sqrt{x}) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\cos \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc par composition, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Et

$$\forall x > 0, \ f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Donc

$$\forall x \geq 0, \ f'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Par composition, on a aussi $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Or $\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$, donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2 = f'(0)$. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en 0. Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et donc, par définition, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

(c) Toujours par composition, on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. En particulier, $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Et

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \ f''(x) &= -\frac{\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{2x} \\
&= -\frac{\cos(\sqrt{x})}{4x} + \frac{\sin(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{4x}\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + \frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{6} + o(x\sqrt{x})\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{24} + o(1) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{12} + o(1).
\end{aligned}$$

Donc $f''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/24$. Or $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), $f' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f''(0) = -1/24$. Et dans ce cas, $f''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/24 = f''(0)$ donc f'' est continue en 0.

Or $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, dérivable en 0, donc $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Autrement dit, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3. (a) Comme $(x \mapsto \sqrt{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par composition, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On admettra qu'il existe deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que

$$\forall x > 0, \ f^{(n)}(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}}\widetilde{P_n}(x) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}}\widetilde{Q_n}(x).$$

De plus, $P_1(X) = 0$, $Q_1(X) = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} P_{n+1}(X) = Q_n(X) + 2XP_n'(X) - 2(n-1)P_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = 2XQ_n'(X) - (2n-1)Q_n(X) - XP_n(X). \end{cases}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donc,

$$\forall x > 0, \ x^{n-1}f^{(n)}(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2^n}\widetilde{P_n(x)} + \frac{\sin(\sqrt{x})}{2^n\sqrt{x}}\widetilde{Q_n}(x).$$

Or $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ a un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ (cf question 1). P_n et Q_n sont des polynômes, donc admettent des développements limités en 0 à l'ordre $n-1$. Par produit, $x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{2^n}\widetilde{P_n}(x)$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0.

D'autre part, on a

$$\sin(y) \underset{y\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(y^{2n-1}).$$

Or $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc

$$\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^k\sqrt{x}}{(2k+1)!} + o(x^{n-1}\sqrt{x})$$

d'où

$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^k}{(2k+1)!} + o(x^{n-1}).$$

Donc $x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ par définition. D'où, par produit, $x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{2^n\sqrt{x}}\widetilde{Q_n}(x)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$.

Finalement, par combinaison linéaire d'applications admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$, $x \mapsto x^{n-1}f^{(n)}(x)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$.

(c) On a déjà vu $P_1(X) = 0$ et $Q_1(X) = -1$. Alors

$$P_2(X) = Q_1(X) + 2XP_1'(X) = -1 \qquad \text{et} \qquad Q_2(X) = 2XQ_1'(X) - Q_1(X) - XP_1(X) = 1$$

et aussi

$$P_3(X) = Q_2(X) + 2XP_2'(X) - 2P_2(X) = 3 \quad \text{et} \quad Q_3(X) = 2XQ_2'(X) - 3Q_2(X) - XP_2(X) = X - 3$$

Alors

$$\forall x > 0,\ f'''(x) = 3\frac{\cos(\sqrt{x})}{8x^2} + \frac{\sin(\sqrt{x})}{8x^2\sqrt{x}}(x-3).$$

Donc

$$\begin{aligned} x^2 f'''(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{3}{8}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) + \frac{x-3}{8}\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{120} + o(x^2). \end{aligned}$$

On a donc $f'''(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/120$ par caractérisation des équivalents par les o. Donc $f'''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/120$.

D'autre part, d'après la question 2c, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, donc $f'' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f'' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ cf 3a. Donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), $f'' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f'''(0) = -1/120$.

Or $f''' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ cf 3a et $f'''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'''(0)$, donc f''' continue en 0, donc $f''' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et donc $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) D'après la question 3b, $x \mapsto x^n f^{(n+1)}(x)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n. Donc $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} x^n f^{(n+1)}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{x^{n-k}} + o(1) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o(1) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0 + o(1). \end{aligned}$$

(b) On considère la fonction $g : x \mapsto f(n)(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} - a_1 \ln(x)$. Alors $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ cf 3a et par combinaison linéaire d'applications $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x > 0,\ g'(x) = f^{(n+1)}(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k} - \frac{a_1}{x}$$

$$\underset{x\to 0}{=} a_0 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0 \in \mathbb{R}.$$

Donc, par le théorème 0.1, $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$. On a donc

$$\begin{aligned} & g(x) \underset{x\to 0}{=} \ell + o(1) \\ \iff & f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + a_1 \ln(x) + \ell + o(1). \end{aligned}$$

(c) On suppose que $f^{(n)}$ a une limite finie en 0. Montrons que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$. On pose $p = \max\{k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k \neq 0\}$. Ce maximum existe puisque $\{k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k \neq 0\}$ est ensemble non vide (par hypothèse) et borné de $\mathbb{N}$. Alors, par définition de p, $a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_n = 0$. Et donc

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{a_p}{(p-1)x^p} - \cdots - \frac{a_2}{x} + a_1 \ln(x) + \ell + o(1) \underset{x\to 0}{\sim} \begin{cases} -\frac{a_p}{(p-1)x^p} & \text{si } p \geq 2 \\ a_1 \ln(x) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pm\infty$ ce qui contredit la limite finie en 0 de $f^{(n)}$. Donc ☠.

D'où $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Et donc

$$f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0.$$

Donc $f^{(n+1)}$ a aussi une limite finie en 0.

(d) On a déjà vu que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On a toujours $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ d'après la 3a. D'après la question 4a, on a,

$$\exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o(1).$$

D'après la 4b, on en déduit que

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k} + a_1 \ln(x) + \ell + o(1).$$

Mais par hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Donc $f^{(n)}$ est continue en 0. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$. D'où, d'après la question 4c, $f^{(n+1)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0$.

Or $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = a_0$.

De plus, $f^{(n+1)} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ cf 3a, et on vient de montrer que $f^{(n+1)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0 = f^{(n+1)}(0)$. Donc $f^{(n+1)} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Et donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Par principe de récurrence, on vient donc de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

5. On vient de montrer, à la question 4d, que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Donc, par théorème de Taylor-Young, f admet un développement limité en 0 à tout ordre et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Or, d'après la question 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n! \binom{2n}{n}}.$$

Problème 2 (Hyperplans de matrices) :

Partie A : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

On note :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(AM) \end{array}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit matriciel est bilinéaire (en particulier linéaire à droite), donc $M \mapsto AM$ est linéaire. La trace est linéaire. Donc, par composition, φ_A est linéaire. De plus, φ_A est à valeur dans $\mathbb{K}$, donc φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut le faire aussi par le calcul :

$$\begin{aligned} \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi_A(\lambda M + N) &= \operatorname{tr}(A(\lambda M + N)) \\ &= \operatorname{tr}(\lambda AM + AN) && \text{distributivité} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(AN) && \operatorname{tr} \text{ linéaire} \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N) \end{aligned}$$

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $AB = (c_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $BA = (d_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. Par produit matriciel,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}.$$

Donc, par définition de la trace,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \operatorname{tr}(BA).$$

3. Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi_A(E_{i,j}) = \operatorname{tr}(AE_{i,j})$. On pose $A = (a_{k,\ell})_{1 \le k,\ell \le n}$ et $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \le k,\ell \le n}$. Alors $AE_{i,j} = (b_{k,\ell})_{1 \le k,\ell \le n}$ où

$$\forall k, \ell \in \{1, \ldots, n\},\ b_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \delta_{i,p} \delta_{j,\ell} = a_{k,i} \delta_{j,\ell}.$$

Donc

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \delta_{j,k} = a_{j,i}.$$

4. On pose

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$$

La bilinéarité du produit matriciel (en particulier la linéarité à gauche) et la linéarité de la trace fournissent la linéarité de Φ : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ (\Phi(\lambda A + B))(M) &= \varphi_{\lambda A + B}(M) && \text{def } \Phi \\ &= \operatorname{tr}((\lambda A + B)M) && \text{def } \varphi \\ &= \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) && \text{linéarité } \operatorname{tr} \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_B(M) && \text{def } \varphi \\ &= \lambda (\Phi(A))(M) + (\Phi(B))(M) && \text{def } \Phi \end{aligned}$$

$$= (\lambda\Phi(A) + \Phi(B))(M) \qquad \text{def opérations entre applications}$$

Donc par définition de l'égalité entre applications, $\Phi(\lambda A+B) = \lambda\Phi(A)+\Phi(B)$. Et donc $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}))$.

De plus :

$$\begin{aligned}
A \in \ker(\Phi) &\iff \varphi_A = 0 \\
&\iff \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi_A(M) = 0 \\
&\iff \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ \varphi_A(E_{i,j}) = 0 && \text{car base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\
&\iff \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ [A]_{j,i} = 0 && \text{cf 3} \\
&\iff A = 0
\end{aligned}$$

Donc $\ker(\Phi) = \{0\}$. Donc Φ est injective.

Or $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Donc, par théorème d'isomorphisme, Φ est un isomorphisme.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Par le lien entre hyperplan et forme linéaire, $\exists \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que $\ker(\varphi) = H$. Par l'isomorphisme Φ de la question précédente, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = \Phi(A) = \varphi_A$. Donc $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \ker(\varphi_A)$.

De plus, si $A = 0$, alors $\varphi_A = 0$ et donc $\ker(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donc $A \neq 0$.

6. Soit $r = \mathrm{rg}(A) \geq 1$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A est équivalente à J_r, donc $\exists U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = UJ_rV$. Et donc

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi_A(M) &= \mathrm{tr}(AM) \\
&= \mathrm{tr}(UJ_rVM) \\
&= \mathrm{tr}(J_rVMU) && \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)
\end{aligned}$$

7. On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $P = 0$, il est clair que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $PX = 0$. Supposons que $P \neq 0$. Donc $\exists k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $[P]_{k,\ell} \neq 0$.

On considère $E_\ell = (\delta_{j,\ell})_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $PE_\ell = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ x_j = \sum_{i=1}^{n} [P]_{j,i}\delta_{i,\ell} = [P]_{j,\ell}.$$

En particulier, $x_k = [P]_{k,\ell} \neq 0$. Donc $PE_\ell \neq 0$.

Donc, par contraposition, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $PX = 0 \implies P = 0$. D'où l'équivalence demandée.

(b) Soit $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$NX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit

$$N^2X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^nX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(c) On a donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N^nX = X$. Autrement dit, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(N^n - I_n)X = 0$. Donc, d'après le début de la question, $N^n = I_n$. Donc, par associativité, $NN^{n-1} = I_n$. Donc N est inversible à droite. Or N est une matrice carré, donc $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (et en plus, $N^{-1} = N^{n-1}$).

On pose $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ où $N_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{tr}(J_rN) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(N_1) = 0.$$

car $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

8. D'après les deux questions précédentes,

$$0 = \mathrm{tr}(J_rN) = \mathrm{tr}(J_rV(V^{-1}NU^{-1})U) = \varphi_A(V^{-1}NU^{-1})$$

Donc $V^{-1}NU^{-1} \in \ker(\varphi_A) = H$. Or $V, N, U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $V^{-1}NU^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Donc $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

Partie B : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication

9. On suppose ici $n = 2$. $\dim(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{K})) = \frac{2(2+1)}{2} = 3 = 4 - 1 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})) - 1$. Donc $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

De plus, on sait que $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication. Donc, d'après la partie A, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \ker(\varphi_A)$ et $\exists Q \in H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

10. H est stable par produit et $Q \in H$. Donc $Q^2 \in H$. Puis, par une récurrence facile (donc à faire), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Q^k \in H$.

11. La famille $(Q, Q^2, \ldots, Q^{n^2})$ est une famille de n^2 vecteurs de H et $\dim(H) = n^2 - 1$. Donc $(Q, Q^2, \ldots, Q^{n^2})$ est liée.

12. Par définition d'une famille liée, $\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tels que $\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k Q^k = 0$.

On pose $i = \min\{k \in \{1, \ldots, n^2\},\ \lambda_i \neq 0\}$ (ce minimum existe puisque les coefficients ne sont pas tous nuls). Donc $i \geq 1$. Et donc $\forall j \in \{1, \ldots, i-1\}$, $\lambda_j = 0$. Et donc aussi

$$0 = \sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k Q^k = \sum_{k=i}^{n^2} \lambda_k Q^k = Q^i \sum_{k=i}^{n^2} \lambda_k Q^{k-i}$$

Or Q est inversible, donc $0 = \sum_{k=i}^{n^2} \lambda_k Q^{k-i}$. De plus, par définition, $\lambda_i \neq 0$. Donc

$$I_n = -\sum_{k=i+1}^{n^2} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} Q^{k-i} \in H$$

car H est un ev et toutes les puissances de Q sont dans H.

13. On vient de montrer que $I_n \in H = \ker(\varphi_A)$. Donc

$$0 = \varphi_A(I_n) = \mathrm{tr}(AI_n) = \mathrm{tr}(A).$$

Soit $B \in H$.

14. Soit $M \in H$. Alors $MB \in H$ car H est stable par produit (par hypothèse). Donc :

$$\begin{aligned}
M \in H &\implies MB \in H && H \text{ stable par produit} \\
&\iff MB \in \ker(\varphi_A) && \text{def } H \\
&\iff \varphi_A(MB) = 0 && \text{def } \ker(\varphi_A) \\
&\iff \mathrm{tr}(AMB) = 0 && \text{def } \varphi_A \\
&\iff \mathrm{tr}(BAM) = 0 && \text{trace d'un produit} \\
&\iff \varphi_{BA}(M) = 0 && \text{def } \varphi_{BA} \\
&\iff M \in \ker(\varphi_{BA}) && \text{def noyau}
\end{aligned}$$

Et donc $H \subset \ker(\varphi_{BA})$.

15. On a $H \subset \ker(\varphi_{BA})$. Si $\varphi_{BA} = 0$, alors $BA = 0 \times A$. Si $\varphi_{BA} \neq 0$, alors $\ker(\varphi_{BA})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par théorème du rang. Et donc $H = \ker(\varphi_{BA})$. Or $H = \ker(\varphi_A)$. Donc φ_A et φ_{BA} sont proportionnelles. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi_{BA} = \lambda\varphi_A$. En particulier, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi_{BA}(E_{i,j}) = \lambda\varphi_A(E_{i,j})$. D'après 3, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $[BA]j, i = \lambda[A]_{j,i}$. Donc $BA = \lambda A$.

On note

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\}.$$

16. On a

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{i,j},\ 2 \le i \le n,\ 1 \le j \le n).$$

Donc $\dim(F) = 1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^n 1 = 1 + \sum_{i=2}^n n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$ car on a une famille génératrice de F qui est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc qui est libre (et donc une base de F).

17. On admet que H est isomorphe à un sev de F. Donc $\dim(H) \le \dim(F) = n^2 - n + 1$.

Or H est un hyperplan. Donc $\dim(H) = n^2 - 1$. Donc $n^2 - 1 \le n^2 - n + 1 \iff n \le 2$. Or $n \ge 2$ par hypothèse. Donc $n = 2$.