



DM 7

Représentation matricielle

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 23 Avril 2024

Problème 1 (Diagonalisation guidée) :

On note

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x, y, z) \in \ker(u) \iff u(x, y, z) = 0 \quad \text{def noyau}$$

$$\iff \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x, y, z)) = 0 \quad \text{iso repr mat}$$

$$\iff \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x, y, z) = 0 \quad \text{matrice de l'image d'un vecteur}$$

$$\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{def Mat}_{\mathcal{C}}(u)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc

$$\ker(u) = \{(x, x, x/2), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(2, 2, 1).$$

Comme $(2, 2, 1) \neq 0$, $\ker(u)$ est une droite vectorielle et $((2, 2, 1))$ en est une base.

(b) Par théorème du rang, on a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)) = \operatorname{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2.$$

(c) En calculant, on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

2. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.

(a) On a $u^0(x) = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}(x) = x = \lambda^0 x$ et par définition, $u(x) = \lambda x$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n(x) = \lambda^n x$. Alors

$$u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) \stackrel{HR}{=} u(\lambda^n x) \stackrel{\text{lin}}{=} \lambda^n u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{n+1} x.$$

D'où, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n(x) = \lambda^n x$.

(b) D'après la question 1c, on a

$$\begin{aligned} A^3 = A &\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)^3 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u) && \text{def } u \\ &\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u^3) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u) && \text{matrice d'une composée} \\ &\iff u^3 = u && \text{iso repr mat} \end{aligned}$$

En particulier, on a $u^3(x) = u(x)$. Et donc, d'après la question précédente, $\lambda^3 x = \lambda x$. Donc $(\lambda^3 - \lambda)x = 0$. Or $x \neq 0$. Donc (puisque'il n'y a pas de diviseur de 0 dans les ev), $\lambda^3 = \lambda$.

On en déduit donc $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. (ATTENTION À NE PAS UTILISER CHUCK NORRIS!!)

On pose $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$ et pour tout $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = \lambda x\}$.

(c) Par définition, on a donc $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 0\} = \ker(u) = \operatorname{Vect}((2, 2, 1))$ d'après la question 1a. On pose $e_2 = (2, 2, 1)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_{-1} &\iff u(x, y, z) = -(x, y, z) \\ &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} && \text{iso repr mat} \\ &\iff (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 && \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 &\leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2 \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 && \begin{aligned} L_1 &\leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \end{aligned} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$E_{-1} = \{(0, y, -y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(0, 1, -1).$$

On pose alors $e_1 = (0, 1, -1)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_1 &\iff u(x, y, z) = (x, y, z) && \text{def } E_1 \\ &\iff (u - \text{Id}_E)(x, y, z) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 && \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 &\leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{5}{2}L_2 \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 && L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$E_1 = \{(x, 0, x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, 0, 1).$$

On pose alors $e_3 = (1, 0, 1)$.

3. On pose $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) On a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$ et donc, par caractérisation des bases par le rang, $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) D'après la définition de e_1, e_2, e_3 , on a $u(e_1) = -e_1$, $u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_3$. Donc

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

(c) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$. En notant $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a donc

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} e_1 = (0, 1, -1) \\ e_2 = (2, 2, 1) \\ e_3 = (1, 0, 1) \end{cases} &\iff \begin{cases} e_1 + e_3 = (1, 1, 0) \\ e_2 = (2, 2, 1) \\ e_3 = (1, 0, 1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e_1 + e_3 = (1, 1, 0) \\ e_2 - 2e_1 - 2e_3 = (0, 0, 1) \\ e_3 = (1, 0, 1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e_1 + e_3 = (1, 1, 0) \\ e_2 - 2e_1 - 2e_3 = (0, 0, 1) \\ 3e_3 + 2e_1 - e_2 = (1, 0, 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e_2 - e_1 - 2e_3 = (0, 1, 0) \\ e_2 - 2e_1 - 2e_3 = (0, 0, 1) \\ 3e_3 + 2e_1 - e_2 = (1, 0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part, P est inversible car c'est une matrice de changement de base et P^{-1} correspond au changement de base inverse, donc

$$P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

(d) Par formule de changement de base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$$

et donc $A = PDP^{-1}$.

Problème 2 (Hyperplans de matrices - fin) :

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que H est stable par multiplication si :

$$\forall M, N \in H, MN \in H.$$

Soit $B \in H$. On a déjà montré (cf DS) que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $BA = \lambda A$.

Soit f (resp. g) l'application linéaire canoniquement associée à A (resp. B). On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On note

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\}.$$

Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A et B respectivement. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On note

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\}.$$

1. $\dim(H) < n^2$ donc $A \neq 0$ et donc $f \neq 0$. Donc $\text{Im}(f) \neq \{0\}$. Soit $e'_1 \in \text{Im}(f)$ avec $e'_1 \neq 0$. Alors (e'_1) est une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Donc, par théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (e'_1) en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
2. Soit $B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$. D'après la question précédente, $e'_1 \in \text{Im}(f)$. Donc $\exists x_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que $e'_1 = f(x_1)$. Et donc $g(e'_1) = g \circ f(x_1) = \lambda f(x_1) = \lambda e'_1$ car $BA = \lambda A \iff g \circ f = \lambda f$ par isomorphisme de représentation matricielle.

Et donc, par définition de la matrice représentation d'une application linéaire,

$$B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{matrix} & g(e'_1) & g(e'_2) & \dots & g(e'_n) \\ \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} & e'_1 \\ & e'_2 \\ & \vdots \\ & e'_n \end{matrix}$$

Et donc $B' \in F$.

3. On note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Et on pose

$$\Psi : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{matrix}$$

Le produit matriciel étant bilinéaire, Ψ est une application linéaire. Il est facile de montrer que Ψ est bijective (le noyau est réduit à 0 car P est inversible) et que $\Psi^{-1} : M \mapsto PMP^{-1}$.

4. Par formule de changement de bases,

$$B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P^{-1}BP = \Psi(B).$$

5. On a

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{i,j}, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

Donc $\dim(F) = 1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^n 1 = 1 + \sum_{i=2}^n n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$ car on a une famille génératrice de F qui est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc qui est libre (et donc une base de F).

6. Ψ est un isomorphisme, donc $\dim(H) = \dim(\Psi(H))$.

De plus, on a montré à la question 2 et avec 4, que $\forall B \in H, B' = \Psi(B) \in F$. Donc $\Psi(H) \subset F$. Et donc $\dim(H) = \dim(\Psi(H)) \leq \dim(F) = n^2 - n + 1$.

Or H est un hyperplan. Donc $\dim(H) = n^2 - 1$. Donc $n^2 - 1 \leq n^2 - n + 1 \iff n \leq 2$. Or $n \geq 2$ par hypothèse. Donc $n = 2$.