NOM :
Prénom :

Mardi 14 Mai 2024

Interrogation 25

Déterminant

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Formule de Sarrus.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)}$$

est une forme n-linéaire alternée en les colonnes de A. De plus, $\det(I_n) = 1$.

2. Développement selon une ligne ou une colonne (un seul cas).
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}A_{i,j}$$

où $A_{i,j}$ est le mineur de A de position (i,j). C'est le développement selon la i-ème ligne de A.

3. Existence et unicité du déterminant.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique forme n-linéaire f sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alternée (et antisymétrique) telle que $f(I_n) = 1$.

4. Expression de l'inverse d'une matrice.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^t\mathrm{com}(A)A = A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A)I_n$.

5. Caractérisation de l'inversibilité par le déterminant.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

6. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors $\begin{vmatrix} A & 0_{n,p} \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0_{p,n} & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

7. Déterminant d'un endomorphisme.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit le déterminant de f par $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$. Ce déterminant étant indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$.

8. Déterminant de Vandermonde.
Soit $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 2 :

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le déterminant $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ est nul.

On calcule :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{lin par rapport } C_1$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (6-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{lin par rapport } L_2$$

$$= (6-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$= (6-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Donc ce déterminant est nul si, et seulement si, $\lambda \in \{1, 2, 6\}$.