



DM 8

Déterminant de matrices à triangles constants

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 14 Mai 2024

Partie I : Déterminants à triangles constants et diagonale constante.

1. Avec beaucoup d'effort, on a $\Delta_1 = a$. Avec un tout petit effort supplémentaire, $\Delta_2 = a^2 - bc$ et enfin la formule de Sarrus nous donne

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = a^3 + bc^2 + b^2c - 3abc$$

2. (a) Dans le cas $a = b$, on a $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a \\ c & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \dots & a & a \\ c & c & \dots & c & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & \dots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \dots & a & 0 \\ a & c & \dots & c & a-c \end{vmatrix} & C_n \leftarrow C_n - C_{n-1} \\ &= (a-c)\Delta_{n-1} \end{aligned}$$

Et donc par récurrence facile, on a $\Delta_n = (a-c)^{n-1}\Delta_1 = a(a-c)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

- (b) On se met dans le cas $a = c$. Alors $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ a & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a \\ b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} & \text{transposée} \\ &= a(a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

(c) On se met dans le cas $b = c$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \dots & b \\ a + (n-1)b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & \dots & a \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n \\
&= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix} \\
&= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ &\vdots \\ L_n &\leftarrow L_n - L_{n-1} \end{aligned} \\
&= (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}
\end{aligned}$$

3. On a $n \geq 3$ et $b \neq c$

(a) On va faire des opérations sur les lignes et les colonnes pour établir la relation. Allons-y.

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-b & b & b & \dots & b \\ c-a & a & b & \dots & b \\ 0 & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & c & \dots & a \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= \begin{vmatrix} 2a-b-c & b-a & 0 & \dots & 0 \\ c-a & a & b & \dots & b \\ 0 & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & c & \dots & a \end{vmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a) \begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix} \\
&= (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a)(b-a)\Delta_{n-2}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation demandée.

- (b) La suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - (2a - b - c)X + (a - b)(a - c)$. Le discriminant de ce polynôme est $(2a - b - c)^2 - 4(a - b)(a - c) = b^2 - 2cb + c^2 = (b - c)^2 > 0$. Il admet donc deux racines réels distinctes $r_1 = a - b$ et $r_2 = a - c$ (qui sont éventuellement à échangées selon que $b > c$ ou $c < b$). On en déduit donc que $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Les valeurs en $n = 1$ et 2 nous permettent d'obtenir les valeurs de λ et μ . On a

$$\begin{cases} \Delta_1 = a = \lambda r_1 + \mu r_2 \\ \Delta_2 = a^2 - bc = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a - b & a - c \\ (a - b)^2 & (a - c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 - bc \end{pmatrix}$$

On suppose $a \neq b$ et $a \neq c$. Le déterminant de la matrice de ce système est $r_1 r_2 (r_2 - r_1) = (a - b)(a - c)(b - c) \neq 0$. Le système est donc de Cramer et on obtient donc

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\begin{vmatrix} a & a - c \\ a^2 - bc & (a - c)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a - b & a - c \\ (a - b)^2 & (a - c)^2 \end{vmatrix}} = \frac{a(a - c)^2 - (a - c)(a^2 - bc)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{-c}{b - c} \\ \mu = \frac{\begin{vmatrix} a - b & a \\ (a - b)^2 & a^2 - bc \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a - b & a - c \\ (a - b)^2 & (a - c)^2 \end{vmatrix}} = \frac{(a - b)(a^2 - bc) - a(a - b)^2}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{b}{b - c} \end{cases}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \frac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}$.

On remarque que cette relation est encore vraie si $a = b$ ou $a = c$ (on notera que les trois paramètres ne peuvent être égaux en même temps) en vertu de la question 2 déjà traitée.

Partie II : Déterminants à triangles constants.

4. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} d_n(x) &= \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \dots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \dots & b + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c + x & c + x & \dots & a_n + x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + x & b - a_1 & \dots & b - a_1 \\ c + x & a_2 - c & \dots & b - c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c + x & 0 & \dots & a_n - c \end{vmatrix} & \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_1 \end{array} \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b - a_1 & \dots & b - a_1 \\ c & a_2 - c & \dots & b - c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 0 & \dots & a_n - c \end{vmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & b - a_1 & \dots & b - a_1 \\ x & a_2 - c & \dots & b - c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \dots & a_n - c \end{vmatrix}}_{x\alpha} & \text{Linéarité 1ere colonne} \\ &= \beta + x\alpha \end{aligned}$$

où α et β sont des déterminants indépendants de x (x n'apparaît pas dans les coefficients des matrices). Donc $d_n(x)$ est une fonction affine en x .

5. On va évaluer en $-c$ et $-b$. On a

$$d_n(-b) = \begin{vmatrix} a_1 - b & 0 & \dots & 0 \\ c - b & a_2 - b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c - b & c - b & \dots & a_n - b \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (a_k - b)$$

car la matrice est triangulaire inférieure.

De même,

$$d_n(-c) = \begin{vmatrix} a_1 - c & b - c & \dots & b - c \\ 0 & a_2 - c & \dots & b - c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - c \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (a_k - c)$$

car la matrice est triangulaire supérieure.

6. On en déduit donc le système

$$\begin{cases} \beta - b\alpha = \prod_{k=1}^n (a_k - b) \\ \beta - c\alpha = \prod_{k=1}^n (a_k - c) \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement par la méthode de votre choix (déterminant dans un système de Cramer ou combinaison linéaire sur les lignes) que

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k - b) - \prod_{k=1}^n (a_k - c)}{c - b} \\ \beta = \frac{c \prod_{k=1}^n (a_k - b) - b \prod_{k=1}^n (a_k - c)}{c - b} \end{cases}$$

Finalement,

$$D_n = d_n(0) = \beta = \frac{c \prod_{k=1}^n (a_k - b) - b \prod_{k=1}^n (a_k - c)}{c - b}$$

Partie III : Déterminants de puissances.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = a^{ij}$.

7. On a donc

$$\delta_1 = \det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$$

et

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^5 - a^4 = a^4(a - 1)$$

par Sarrus.

8. Soit $n \geq 3$. On suppose $a^2 = 1$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^{3k} = (a^3)^k = a^k$. Et donc, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{1,j} = a^j = a^{3j} = a_{3,j}$. Donc $L_1(A_n) = L_3(A_n)$. Donc $\delta_n = \det(A_n) = 0$.

9. On suppose encore $n \geq 3$ et $a^2 \neq 1$. On suppose aussi $\delta_{n-1} \neq 0$. On pose

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} & X \\ a^2 & a^4 & a^6 & \dots & a^{2(n-1)} & X^2 \\ a^3 & a^6 & a^9 & \dots & a^{3(n-1)} & X^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \dots & a^{(n-1)^2} & X^{n-1} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \dots & a^{n(n-1)} & X^n \end{vmatrix}$$

(a) En développant le déterminant P_n selon la dernière colonne, on a

$$P_n(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} X^i (P_n)_{i,n}$$

où $(P_n)_{i,n}$ est le déterminant obtenue en enlevant la i -ème ligne et la n -ème colonne de P_n . Par conséquent, tous les $(P_n)_{i,n}$ sont des constantes indépendantes de X . Donc $P_n(X)$ est bien un polynôme.

D'autre part,

$$(P_n)_{n,n} = \begin{vmatrix} a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^2 & a^4 & \dots & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & \dots & a^{(n-1)^2} \end{vmatrix} = \delta_{n-1} \neq 0.$$

Donc P_n est bien de degré n . Et son coefficient dominant est δ_{n-1} .

(b) On remarque aisément que

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \widetilde{P}_n(a^k) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} & a^k \\ a^2 & a^4 & a^6 & \dots & a^{2(n-1)} & a^{2k} \\ a^3 & a^6 & a^9 & \dots & a^{3(n-1)} & a^{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \dots & a^{(n-1)^2} & a^{k(n-1)} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \dots & a^{n(n-1)} & a^{kn} \end{vmatrix} = 0$$

car la k -ème colonne et la dernière sont égales.

De plus, on a facilement aussi $\widetilde{P}_n(0) = 0$ car la dernière colonne est nulle.

Finalement, on vient de montrer que P_n a n racines $0, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ et elles sont distinctes deux à deux (car $a \neq 0$ et $a^2 \neq 1$). Donc finalement, P_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Comme $\text{coeff dom}(P_n) = \delta_{n-1}$, on en déduit

$$P_n(X) = \delta_{n-1} X \prod_{k=1}^{n-1} (X - a^k).$$

(c) Par définition de δ_n , on a

$$\begin{aligned} \delta_n &= \widetilde{P}_n(a^n) && \text{def } \delta_n \\ &= \delta_{n-1} a^n \prod_{k=1}^{n-1} (a^n - a^k) && \text{cf 9.c} \\ &= \delta_{n-1} a^n \prod_{k=1}^{n-1} a^k \prod_{k=1}^{n-1} (a^{n-k} - 1) \\ &= \delta_{n-1} a^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} (a^j - 1) && \text{chgt indice } j = n - k \\ &= \delta_{n-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1). \end{aligned}$$

(d) Le raisonnement de la question précédente peut être tenu pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Donc on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \delta_n = \delta_{n-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)$$

sous condition que $\delta_{n-1} \neq 0$.

Mais on a montré que $\delta_1 = a \neq 0$ et $a^{\frac{2(2+1)(2+2)}{6}} \prod_{k=1}^1 (a^k - 1)^{2-k} = a^4(a-1) = \delta_2 \neq 0$ car $a^2 \neq 1$ et $a \neq 0$.

Supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \delta_n a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \prod_{k=1}^n (a^k - 1) && \text{car } n+1 \geq 3 \\ &= a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \prod_{k=1}^n (a^k - 1) && \text{HR} \\ &= a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} (a^n - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n+1-k} \\ &= a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \prod_{k=1}^n (a^k - 1)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Et comme $a \neq 0$, on a $a^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \neq 0$ et $a^2 \neq 1$ nous donne $a \neq \pm 1$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^k \neq 1$ et donc $\prod_{k=1}^n (a^k - 1)^{n+1-k} \neq 0$.

Donc, par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k} \neq 0.$$