



DS 10

Représentation matricielle - Déterminant

Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 3

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 22 Avril 2024

Partie 1 : Étude préliminaire et cas particulier

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par définition de la trace, $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} \in \mathbb{C}$. Donc $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors $A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ par définition des opérations sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Et donc

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + \lambda B) &= \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) && \text{def trace} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{i,i} && \text{linéarité somme} \\ &= \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B) && \text{def trace} \end{aligned}$$

On en déduit donc que la trace est une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Donc tr est bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $BA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les matrices produits dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, par définition du produit matriciel, on a

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} && \text{def trace} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} && \text{produit matriciel} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} && \text{commutativité dans } \mathbb{C} \\ &= \sum_{k=1}^n d_{k,k} && \text{produit matriciel} \\ &= \text{tr}(BA) && \text{def trace} \end{aligned}$$

Donc $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables. Donc $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\begin{aligned}\text{tr}(B) &= \text{tr}(P^{-1}AP) \\ &= \text{tr}(P^{-1}(AP)) && \text{associativité} \\ &= \text{tr}((AP)P^{-1}) && \text{cf 2} \\ &= \text{tr}(A)\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}P) \det(A) \\ &= \det(A).\end{aligned}$$

Donc deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $(A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$. Donc la famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée. Donc, par définition, $\exists(a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$.

On pose alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. Alors $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P) \leq n^2$ et $P \neq 0$ car $(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq 0$. Et bien sûr, $\tilde{P}(A) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$. Donc P est un polynôme annulateur non trivial de A , de degré inférieur ou égale à n^2 .

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 3 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{def polynôme caractéristique} \\ &= \begin{vmatrix} 5-X & 1 & 3 \\ 5-X & 3-X & 1 \\ 5-X & 1 & 1-X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (5-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} && \text{linéarité par rapport à la première colonne} \\ &= (5-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-X & -2 \\ 0 & 0 & -2-X \end{vmatrix} && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \\ &= -(5-X)(2-X)(2+X) && \text{déterminant matrice triangulaire}\end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique de A est le polynôme $P_A(X) = -(5-X)(2-X)(2+X)$.

6. On calcul :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_A(A) &= -(5I_3 - A)(2I_3 - A)(2I_3 + A) \\ &= -(A - 5I_3)(A - 2I_3)(A + 2I_3) \\ &= - \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\ &= -7 \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= 0$$

On a donc bien $\widetilde{P}_A(A) = 0$.

Partie 2 : Polynôme caractéristique

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. On a, par définition du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & 0 & a_{1,3} \\ 0 & X & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} - X \end{vmatrix} \\ &= \det(A) - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & X & 0 \\ a_{3,1} & 0 & X \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & 0 & a_{1,3} \\ 0 & X & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= \det(A) - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} X - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} X + a_{1,1} X^2 - \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} X + a_{2,2} X^2 + a_{3,3} X^2 - X^3 \\ &= \det(A) - \mu(A)X + \text{tr}(A)X^2 - X^3. \end{aligned}$$

Donc $P_A(X) = \det(A) - \mu(A)X + \text{tr}(A)X^2 - X^3 \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P_A) = 3$.

8. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On suppose A et B semblable. Donc $\exists P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI_3) && \text{def polynôme caractéristique} \\ &= \det(P^{-1}AP - XP^{-1}I_3P) \\ &= \det(P^1(A - XI_3)P) \\ &= \det(P)^{-1} \det(A - XI_3) \det(P) \\ &= \det(A - XI_3) && \text{car } P \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \\ &= P_A(X). && \text{def } P_A \end{aligned}$$

D'où $P_A = P_B$ si A et B sont semblables.

9. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$P_M(X) = \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 & 0 \\ 0 & 1 - X & 0 \\ 0 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^3 = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & 0 \\ 0 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = P_{I_3}(X).$$

Donc M et I_3 ont le même polynôme caractéristique.

En revanche, M et I_3 ne sont pas semblables. Si elles l'étaient, il existerait $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $M = P^{-1}I_3P = I_3$. Mais $M \neq I_3$.

Donc deux matrices non semblables peuvent avoir le même polynôme caractéristique.

10. Soit $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblables. D'après la question 8, $P_A = P_B$. On a donc $P_A(X) = \det(A) - \text{tr}(A)X + \mu(A)X^2 - X^3 = \det(B) - \text{tr}(B)X + \mu(B)X^2 - X^3 = P_B(X)$. Par liberté de la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$, on en déduit

$$\begin{cases} \det(A) = \det(B) \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ \mu(A) = \mu(B) \end{cases}$$

11. Par caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, on a

$$A \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \iff \det(A) \neq 0 \iff \widetilde{P}_A(0) \neq 0.$$

Et donc $A \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ si, et seulement si, 0 n'est pas racine de P_A , par définition d'une racine d'un polynôme.

12. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A . Donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$. En nommant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P_A .

Par définition de P_A , on a donc $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Donc la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Or $A - \lambda I_3 = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) - \lambda \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{C}^3}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^3})$ par linéarité des représentations matricielles. Et par isomorphisme de représentation matricielle, on a donc $u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^3}$ non inversible.

Par théorème d'isomorphisme (qui est un corollaire du théorème du rang), on a donc aussi $\ker(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^3}) \neq \{0\}$. Et donc, $\exists x \in \mathbb{C}^3$ avec $x \neq 0$ tel que $(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(x) = 0$. On a donc $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$.

13. On suppose que P_A a trois racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$.

Soit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0$. En appliquant u , on a, avec la linéarité de u , $\mu_1 u(x_1) + \mu_2 u(x_2) + \mu_3 u(x_3) = 0$. Et par définition, $\mu_1 \lambda_1 x_1 + \mu_2 \lambda_2 x_2 + \mu_3 \lambda_3 x_3 = 0$. En appliquant de nouveau u , on obtient $\lambda_1^2 \mu_1 x_1 + \lambda_2^2 \mu_2 x_2 + \lambda_3^2 \mu_3 x_3 = 0$. On a d

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 \mu_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1^2 \mu_1 x_1 + \lambda_2^2 \mu_2 x_2 + \lambda_3^2 \mu_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

ATTENTION! On ne peut pas écrire ce système matriciellement! Les x_i sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et pas des scalaires!

Toutefois, on peut appliquer le même raisonnement de résolution.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3 \mu_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1^2 \mu_1 x_1 + \lambda_2^2 \mu_2 x_2 + \lambda_3^2 \mu_3 x_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0 \\ \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \mu_3(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 = 0 \\ \lambda_2 \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \lambda_3 \mu_3(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda_1 L_1 \end{array} \\ \iff & \begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0 \\ \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \mu_3(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 = 0 \\ \mu_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)x_3 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - \lambda_2 L_3 \\ \iff & \begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} & \text{car } x_3 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ \iff & \begin{cases} \mu_1 x_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} & x_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \iff & \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0 & x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la famille (x_1, x_2, x_3) est libre. Donc (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ par caractérisation des bases en dimension finie.

D'autre part, par définition des x_i , on a $u(x_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. On note $\mathcal{E} = (x_1, x_2, x_3)$. Alors, par définition,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) & u(x_2) & u(x_3) \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

En appelant $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{C}$, on a $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{E}$, la formule de changement de bases, nous donne

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1}.$$

Et donc A est semblable à une matrice diagonale, par définition de deux matrices semblables.

Partie 3 : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associée à A . Soit $x \in \mathbb{C}^3$ tel que $x \neq 0$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. La famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ contient $n + 1 \geq 4 > 3$ vecteurs. Or $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$. Donc la famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est liée.

15. On vient de montrer à la question précédente, que $\forall n \geq 3$, $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est liée. Alors $\{k \in \mathbb{N}, (x, u(x), \dots, u^k(x))\}$ est un ensemble non vide ($x \neq 0$ donc (x) est libre) et majorée par 2. Donc $p = \max\{k \in \mathbb{N}, (x, u(x), \dots, u^k(x))\}$ existe et par définition du maximum, $p \leq 2$.

16. D'après la question précédente, on a $(x, u(x), \dots, u^{p+1}(x))$ liée. Donc, par définition (en fait par négation de la définition d'une famille libre), $\exists(\beta_0, \dots, \beta_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+2} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=0}^{p+1} \beta_k u^k(x) = 0$.

Supposons $\beta_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=0}^p \beta_k u^k(x) = 0$. Or, d'après la question 14, $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est libre. Donc $\beta_0 = \dots = \beta_p = 0$. Donc $0 = (\beta_0, \dots, \beta_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+2} \setminus \{0\}$. Donc $\beta_{p+1} \neq 0$.

On en déduit donc $\beta_{p+1} \neq 0$. On pose alors $\forall k \in \{0, \dots, p\}$, $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta_{p+1}}$. On a donc $u^{p+1}(x) + \sum_{k=0}^p \alpha_k u^k(x) = 0$.

D'où $\exists(\alpha, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que $u^{p+1}(x) + \sum_{k=0}^p \alpha_k u^k(x) = 0$.

Remarque : On ne peut pas conclure que $(\alpha, \dots, \alpha_p) \neq 0$ car on pourrait avoir $u^{p+1}(x) = 0$.

17. On suppose ici $p = 2$.

(a) D'après la question 14, on a $(x, u(x), u^2(x))$ libre dans $\mathbb{C}^3$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Et de plus, on a $u^3(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x) - \alpha_2 u^2(x)$. On note $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x))$. Alors

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u(x) & u^2(x) & u^3(x) \\ 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ u(x) \\ u^2(x) \end{matrix}$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -X & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 - X \end{vmatrix} \\ &= -X^2(\alpha_2 + X) - \alpha_0 - \alpha_1 X && \text{Sarrus} \\ &= -\alpha_0 - \alpha_1 X - \alpha_2 X^2 - X^3 \end{aligned}$$

(c) En appelant $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ et en utilisant la formule de changement de bases, on a $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = PBP^{-1}$. Donc A et B sont semblables (les matrices de passages sont inversibles). D'après la question 8, $P_A = P_B$.

(d) On en déduit alors

$$\begin{aligned}
 \widetilde{P}_A(u)(x) &= \widetilde{P}_B(u)(x) && \text{car } P_A = P_B \\
 &= (-\alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - \alpha_1 u - \alpha_2 u^2 - u^3)(x) && \text{cf 17b} \\
 &= -(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \alpha_2 u^2(x) + u^3(x)) \\
 &= 0 && \text{cf 16}
 \end{aligned}$$

18. On suppose maintenant $p = 1$.

(a) La famille $(x, u(x))$ est libre, par hypothèse. Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille par un vecteur $e \in \mathbb{C}^3$ de sorte que $(x, u(x), e)$ soit une base de $\mathbb{C}^3$.

(b) D'après 16, on a $u^2(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x)$. Et $u(e) \in \mathbb{C}^3 = \text{Vect}(x, u(x), e)$. Donc $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $u(e) = ax + bu(x) + ce$. Alors, si on note $\mathcal{B} = (x, u(x), e)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u(x) & u^2(x) & u(e) \\ 0 & -\alpha_0 & a \\ 1 & -\alpha_1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ u(x) \\ e \end{matrix}$$

(c) On alors

$$\begin{aligned}
 P_B(X) &= \det(B - XI_3) \\
 &= \begin{vmatrix} -X & -\alpha_0 & a \\ 1 & -X - \alpha_1 & b \\ 0 & 0 & c - X \end{vmatrix} \\
 &= (c - X) \begin{vmatrix} -X & -\alpha_0 \\ 1 & -X - \alpha_1 \end{vmatrix} && \text{dvpmt } L_3 \\
 &= (c - X)(X(X + \alpha_1) + \alpha_0) \\
 &= (c - X)(X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0).
 \end{aligned}$$

On pose $v = c \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - u$. Alors

$$\widetilde{P}_B(u) = (c \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - u) \circ (u^2 + \alpha_1 u + \alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^3}) = v \circ (u^2 + \alpha_1 u + \alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^3}).$$

(d) Toujours par changement de bases, A et B sont semblables. Donc, par la question 7, elles ont le même polynôme caractéristique. Donc

$$\begin{aligned}
 \widetilde{P}_A(u)(x) &= \widetilde{P}_B(u)(x) && \text{cf 7} \\
 &= v \circ (u^2 + \alpha_1 u + \alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^3})(x) && \text{cf 18c} \\
 &= v(u^2(x) + \alpha_1 u(x) + \alpha_0 x) && \text{def composition} \\
 &= v(0) && \text{cf 16} \\
 &= 0 && \text{car } v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)
 \end{aligned}$$

19. On suppose maintenant $p = 0$. Par le théorème de la base incomplète, on choisit $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^3$ tels que (x, e_1, e_2) base de $\mathbb{C}^3$.

(a) Par 16, on a $u(x) = -\alpha_0 x$ et $\exists a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tels que $u(e_1) = a_1 x + b_1 e_1 + c_1 e_2$ et $u(e_2) = a_2 x + b_2 e_1 + c_2 e_2$. Alors, en notant $\mathcal{B} = (x, e_1, e_2)$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u(x) & u(e_1) & u(e_2) \\ -\alpha_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

(b) Alors, par formule de changement de base, A et B sont semblables, donc, d'après 8,

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= P_B(X) \\
&= \det(B - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} -\alpha_0 - X & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 - X & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 - X \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha_0 + X) \begin{vmatrix} b_1 - X & b_2 \\ c_1 & c_2 - X \end{vmatrix} \quad \text{dvpmt } C_1 \\
&= -(\alpha_0 + X)((b_1 - X)(b_2 - X) - c_1 c_2) \\
&= (c_1 c_2 - (b_1 - X)(b_2 - X))(\alpha_0 + X)
\end{aligned}$$

On pose alors $v = c_1 c_2 \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - (b_1 \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - u) \circ (b_2 \text{Id}_{\mathbb{C}^3} - u) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$. Alors

$$\widetilde{P}_A(u)(x) = v \circ (\alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^3} + u)(x) = v(\alpha x + u(x)) = v(0) = 0.$$

20. On reprend depuis le début. On vient de montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ et u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associée à A , alors $\widetilde{P}_A(u)(x) = 0$. Autrement dit, on vient de montrer que $\forall x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, $\widetilde{P}_A(u)(x) = 0$. Or $\widetilde{P}_A(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$. Alors $\widetilde{P}_A(u)(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{C}^3$, $\widetilde{P}_A(u)(x) = 0$. Et donc, par définition, $\widetilde{P}_A(u) = 0$.

Et utilisant l'isomorphisme de représentation matricielle, on a $\widetilde{P}_A(A) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\widetilde{P}_A(u)) = 0$.

On vient de prouver que $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\widetilde{P}_A(A) = 0$. Et donc on vient de montrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Partie 4 : Une application aux suites linéaires récurrentes triples

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 2u_n - 5u_{n+1} + 4u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

22. On a bien sûr, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

par hypothèse de récurrence.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

23. On calcul

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 2 & -5 & 4 - X \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1-X & -X & 1 \\ 1-X & -5 & 4-X \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & -5 & 4-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 0 & -6 & 4-X \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= (1-X)(-(1+X)(4-X) + 6) \\
&= (1-X)(X^2 - 3X + 2) \\
&= -(1-X)^2(X-2) \\
&= -X^3 + 4X^2 - 5X + 2
\end{aligned}$$

24. D'après le théorème de Cayley-Hamilton montré dans la partie 3, on a $\widetilde{P}_A(A) = 0$. Donc $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$.

25. On pose $B = A - I_3$. Comme A et I_3 commutent, on peut utiliser le binôme de Newton et donc

$$\begin{aligned}
B^3 &= A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 & \text{Newton} \\
&= A^2 - 2A + I_3 & \text{cf 24} \\
&= B^2
\end{aligned}$$

On aurait pu le faire différemment avec la forme factoriser de $P_A : \widetilde{P}_A(A) = 0$ donc $(A - I_3)^2(A - 2I_3) = 0 \iff (A - I_3)^3 - (A - I_3)^2 = 0 \iff B^3 = B^2$.

26. On a déjà $B^2 = B^2$ et $B^3 = B^2$ par la question précédente. Supposons qu'il existe $k \geq 2$ tel que $B^k = B^2$. Alors $B^{k+1} = BB^k = BB^2 = B^3 = B^2$. Donc, par principe de récurrence, $\forall k \geq 2, B^k = B^2$.

27. Soit $n \geq 2$. Par Newton

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

D'où $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1 - n$.

On a $A = B + I_3$. Alors, par commutativité de B et I_3

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2, A^n &= (B + I_3)^n & \text{Newton} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \\
&= I_3 + nB + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} B^k \\
&= I_3 + nB + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \right) B^2 & \text{cf 26} \\
&= I_3 + nB + (2^n - n - 1)B^2 & \text{cf début de question} \\
&= I_3 + n(A - I_3) + (2^n - n - 1)(A^2 - 2A + I_3) \\
&= (2^n - 2n)I_3 - (2^{n+1} - 3n - 2)A + (2^n - n - 1)A^2.
\end{aligned}$$

On notera que cette relation est vraie encore en $n = 0$ et $n = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - 2n)I_3 - (2^{n+1} - 3n - 2)A + (2^n - n - 1)A^2$.

28. On calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 8 & -18 & 11 \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, A^n &= (2^n - 2n)I_3 - (2^{n+1} - 3n - 2)A + (2^n - n - 1)A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 2n & 3 + 2n - 2^{n+1} & 2^n - n - 1 \\ 2(2^n - n - 1) & 3n + 5 - 2^{n+2} & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2(2^{n+1} - n - 2) & 3n + 8 - 2^{n+3} & 2^{n+2} - n - 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc aussi, avec la question 22, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$. Et en observant la première ligne, on a donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_n &= L_1(A)X_0 \\ &= (2^n - 2n)u_0 + (3n + 2 - 2^{n+1})u_1 + (2^n - n - 1)u_2 \\ &= 3n + 2 - 2^{n+1} + 2(2^n - n - 1) \\ &= n.\end{aligned}$$