DM 9
Intégration
Intégrale de Wallis

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 28 Mai 2024

On se propose dans ce problème, de montrer la relation fameuse

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

en n'utilisant que des outils liés aux intégrales.

Partie I : Intégrale de Wallis

On définit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est eun suite décroissante et convergente.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
6. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$
7. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$
8. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante et donner sa valeur.
9. En utilisant la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
10. En réutilisant la suite J, donner un équivalent simple de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. En déduire un équivalent simple de I_n.

Partie II : Résultats intermédiaires

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_k = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2k\pi x)dx$.
13. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_0^1 |\cos(2nx\pi)|dx = \frac{2}{\pi}$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties (entre autres choses), montrer qu'il existe $b \geq 0$ indépendant de n tel que
$$\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)dx\right| \leq \frac{b}{2n\pi}.$$
On explicitera la constante b à l'aide la fonction g.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

(a) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) = \frac{\cos((n+1)\pi x)\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

(b) En déduire que
$$2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) = \text{cotan}(\pi x)\sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1.$$

15. On note f l'application définie par $\forall x \in]0,1[$, $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}\text{cotan}(\pi x)$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 puis en 1.
On note encore l'application ainsi prolongée.

(b) Calculer la dérivée de f sur $]0,1[$.

(c) Montrer alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Partie III : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

16. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}$.

17. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appellera $\zeta(2)$ sa limite. Donner un encadrement de $\zeta(2)$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer
$$2\sum_{k=1}^{n} A_k = \int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)dx + A_n - \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}dx.$$
Indic : *Attention ! On rappelle que la fonction* cotan *n'est pas définie en* 0*, ni en* 1*.*

19. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.