DM 9
Intégration
Intégrale de Wallis
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 28 Mai 2024

Partie I : Intégrale de Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces intégrales sont bien définies puisque $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. On a donc
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$
et
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$$
On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$. C'est un changement de variable affine, donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et bijectif vérifiant $dx = -dt$. Et donc on a
$$I_n = \int_{\pi/2}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^n (-dx) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$$
puisque $\forall y \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi/2 - y) = \sin(y)$.

3. On sait que $\forall t \in [0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(t)^n \geq 0$. Donc, par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
Mais d'autres part, pour $t = \pi/4$ par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(\pi/4)^n = \frac{1}{2^{n/2}} \neq 0$. Donc la fonction est positive et non identiquement nulle, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \neq 0$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)$ puisque $0 \leq \cos(t) \leq 1$. On en déduit donc, par croissance de l'intégrale,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ I_{n+1} \leq I_n$$
Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Mais comme elle est minorée (strictement) par 0, le théorème de la limite monotone nous assure la convergence de (I_n).

5. Soit $n \geq 2$. On a $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t)^{n-1}dt$. On effectue une intégration par partie avec les fonction $u(t) = \cos(t)^{n-1}$ et $v(t) = \sin(t)$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et vérifient $u'(t) = -(n-1)\sin(t)\cos(t)^{n-2}$ et $v'(t) = \cos(t)$. Donc
$$I_n = [\sin(t)\cos(t)^{n-1}]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin(t)^2 \cos(t)^{n-2}dt$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^{n-2}dt$$

puisque $n-1 \geq 1$.

On a donc

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

D'où

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \tag{1}$$

6. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)I_{n+1}I_n = nI_{n-1}I_n$$

Donc la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante et égale à $I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

7. On pourrait montrer les relations par récurrences, mais on va faire autrement. On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}I_{2n}$$

Et par une récurrence facile, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}I_0$$

D'où l'on déduit alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1} n2k}I_0 \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k-1)}{2k}}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}2k}}{2^n n!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Et de même, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}I_{2n+1}$$

Donc, par récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}I_1 \\ &= \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} \\ &= \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k+1)}{2k}} \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

8. On a vu à la question 4 que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ par définition de la décroissance.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$J_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = J_n$$

Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constante égale à $J_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

10. D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} > 0$ d'après 3, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

d'après 5. Or $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc par théorèmes des gendarmes $\frac{I_n}{I_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Et donc, par définition, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

11. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. Donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ puisque $\pi/2 \neq 0$ et $J_n = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_n^2$.

On en déduit donc, par transitivité de la relation d'équivalence, $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Et donc $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ puisque l'on peut diviser dans les relations d'équivalences. Et comme on peut élever aussi à une puissance réelle avec des suites à termes strictement positifs (et c'est le cas), on obtient donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie II : Résultats intermédiaires

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_k = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2k\pi x)dx$. Comme $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}\cos(2k\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, A_k est bien définie.

On pose $u : x \mapsto x(x-1)/2$ et $v : x \mapsto \frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}$. Alors $u, v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall x \in [0,1]$, $u'(x) = x - 1/2$ et $v'(x) = \cos(2k\pi x)$. Donc, par intégration par parties,

$$A_k = \int_0^1 \underbrace{\frac{x(x-1)}{2}}_{\downarrow}\overbrace{\cos(2k\pi x)}^{\downarrow} = \left[\frac{(x-1/2)\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(x-1/2)}_{\downarrow}\overbrace{\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}}^{\downarrow}dx$$

On pose alors $w : x \mapsto -\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}$. Alors $w \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall x \in [0,1]$, $w'(x) = \sin(2k\pi x)$. De plus, on a en fait $u : x \mapsto x(x-1)/2 \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ car polynomiale. Donc $u' : x \mapsto (x-1/2) \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall x \in [0,1]$, $u''(x) = 1$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{4k^2\pi^2}[(x-1/2)\cos(2k\pi x)]_0^1 + \frac{1}{4k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(2k\pi x)dx \\ &= \frac{1}{4k^2\pi^2}(1/2+1/2) + \frac{1}{8k^2\pi^2}[\sin(2k\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{4k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

13. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On a

$$\int_0^1 |\cos(2n\pi x)|dx$$

$$= \int_0^{2n\pi} |\cos(t)|\frac{dt}{2n\pi}$$

chgt var lin
$t = 2n\pi x$
$dt = 2n\pi dx$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|\cos(t)|dt && \text{Chasles et linéarité intégrale}\\
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}|\cos(t)|dt+\int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi}|\cos(t)|dt\right) && \text{Chasles}\\
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{0}^{\pi}|\cos(x+2k\pi)|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\cos(x+2k\pi)|dx\right) && \text{chgt var affine } x=t-2k\pi\\
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\cos(x)|dx\right) && \text{périodicité}\\
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|dx+\int_{0}^{\pi}|-\cos(t+\pi)|dt\right) && \text{chgt var affine } t=x-\pi\\
&= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n}2\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|dx\\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(x)dx\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}\left([\sin(x)]_0^{\pi/2}-[\sin(x)]_{\pi/2}^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}(1-1-0+1)\\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

(b) Par produit de fonctions continues sur $[0,1]$, $\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)dx$ est bien définie.

On pose $u : x \mapsto -\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}$. Alors $u \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $u' : x \mapsto \sin(2n\pi x)$. Et $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Donc, par intégration par parties,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{g(x)}_{\downarrow}\overbrace{\sin(2n\pi x)}^{\downarrow} &= -\frac{1}{2n\pi}[g(x)\cos(2n\pi x)]_0^1+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 g'(x)\cos(2n\pi x)dx\\
&= -\frac{g(1)-g(0)}{2n\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 g'(x)\cos(2n\pi x)dx.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)dx\right| &= \left|-\frac{g(1)-g(0)}{2n\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 g'(x)\cos(2n\pi x)dx\right|\\
&\le \frac{|g(1)|+|g(0)|}{2n\pi}+\frac{1}{2n\pi}\left|\int_0^1 g'(x)\cos(2n\pi x)dx\right| && \text{inégalité triangulaire}\\
&\le \frac{|g(1)|+|g(0)|}{2n\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 |g'(x)||\cos(2n\pi x)|dx
\end{aligned}
$$

Mais $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, donc $g' \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Et donc, par TVI pour les segments, g' est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$. On pose $M=\max_{[0,1]}|g'|=\max_{x\in[0,1]}|g'(x)|$. Alors

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)dx\right| &\le \frac{|g(1)|+|g(0)|}{2n\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1 M|\cos(2n\pi x)|dx && \text{croissance de l'intégrale}\\
&= \frac{|g(1)|+|g(0)|}{2n\pi}+\frac{M}{n\pi}\int_0^1 |\cos(2n\pi x)|dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|g(1)|+|g(0)|}{2n\pi} + \frac{M}{n\pi}\frac{2}{\pi} && \text{cf 13a}\\
&= \frac{|g(1)|+|g(0)|+4M/\pi}{2n\pi}\\
&= \frac{b}{2n\pi}
\end{aligned}
$$

avec $b = |g(1)| + |g(0)| + \frac{4}{\pi}\max_{[0,1]}|g'| \in \mathbb{R}$ indépendant de n.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

   (a) C'est classique, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}(e^{2ik\pi x})\\
&= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2k\pi x}\right) && \mathbb{R}\text{-linéarité de } \mathfrak{Re}\\
&= \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{2i\pi x} - e^{2i(n+1)\pi x}}{1-e^{2i\pi x}}\right) && \text{car } x \in]0,1[\implies e^{2i\pi x} \neq 1\\
&= \mathfrak{Re}\left(\frac{(e^{2i\pi x}\left(1-e^{2in\pi x}\right)}{1-e^{2i\pi x}}\right)\\
&= \mathfrak{Re}\left(\frac{e^{2i\pi x}e^{in\pi x}\left(e^{-in\pi x}-e^{in\pi x}\right)}{e^{i\pi x}\left(e^{-i\pi x}-e^{i\pi x}\right)}\right) && \text{arc moitié}\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{i(n+1)\pi x}\frac{-2i\sin(n\pi x)}{-2i\sin(\pi x)}\right) && \text{Euler}\\
&= \frac{\cos((n+1)\pi x)\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}
\end{aligned}
$$

   (b) On en déduit alors

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) &= \frac{2\cos((n+1)\pi x)\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}\\
&= \frac{\sin((n+1)\pi x + n\pi x) - \sin((n+1)\pi x - n\pi x)}{\sin(n\pi x)}\\
&= \frac{\sin((2n+1)\pi x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x)}\\
&= \frac{\sin(2n\pi x)\cos(\pi x) + \cos(2n\pi x)\sin(\pi x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x)}\\
&= \operatorname{cotan}(\pi x)\sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1.
\end{aligned}
$$

15. On pose $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}\operatorname{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in]0,1[$.

   (a) f est bien définie, continue et dérivable sur $]0,1[$ par produit de fonctions qui le sont (et par composition car $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin} \in \mathcal{C}^\infty(]0,\pi[,\mathbb{R})$ par quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas).

   Par ailleurs,

$$
f(x) = \frac{x(x-1)\cos(\pi x)}{2\sin(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{\pi x} = -\frac{1}{\pi} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{\pi}.
$$

   Or $f \in \mathcal{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{\pi}$.

   De plus,

$$
f(1+h) = \frac{h(1+h)\cos(\pi + h\pi)}{\sin(\pi + h\pi)}
$$

$$= \frac{h(1+h)\cos(h\pi)}{\sin(h\pi)}$$
$$\underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{h\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\pi} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{\pi}$. Or $f \in \mathcal{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$. Donc f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{\pi}$.

On appelle encore f le prolongement. Donc :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1/\pi & x = 0 \\ \frac{x(x-1)}{2}\operatorname{cotan}(x\pi) & 0 < x < \pi \\ 1/\pi & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

(b) On a vu que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$. Donc elle est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = (x-1/2)\operatorname{cotan}(x\pi) + \frac{x(x-1)}{2}\frac{-\pi\sin(x\pi)^2 - \pi\cos(x\pi)^2}{\sin(x\pi)^2}$$
$$= (x-1/2)\frac{\cos(x\pi)}{\sin(x\pi)} - \frac{\pi x(x-1)}{2\sin(x\pi)^2}$$
$$= \frac{(2x-1)\cos(x\pi)\sin(x\pi) - x^2\pi + x\pi}{2\sin(x\pi)^2}.$$

(c) On a facilement, à partir de développements limités,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{(2x-1)(1-x^2\pi^2/2+o(x^2))(x\pi+o(x^2)) - x^2\pi + x\pi + o(x^2)}{2x^2\pi^2 + o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{-x\pi + 2x^2\pi - x^2\pi + x\pi + o(x^2)}{2x^2\pi^2 + o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$$

Donc $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2\pi}$. Donc, par théorème de prolongement CC^1, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

De plus, $f \in \mathcal{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})$, donc $f' \in \mathcal{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2\pi} = f'(0)$, donc f' est continue en 0 par caractérisation de la continuité par les limites et donc $f \in \mathcal{C}^1([0,1[,\mathbb{R})$.

On procède de la même façon en 1 :

$$f'(1+h) = \frac{(1+2h)\cos(\pi+h\pi)\sin(\pi+h\pi) - (1+h)^2\pi + (1+h)\pi}{2\sin(\pi+h\pi)^2}$$
$$= \frac{(1+2h)\cos(h\pi)\sin(h\pi) - (h^2+2h+1)\pi + h\pi + \pi}{2\sin(h\pi)^2}$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{(1+2h)(1-h^2\pi^2/2+o(h^2))(h\pi+o(h^2)) - (h^2+2h+1)\pi + h\pi + \pi}{2h^2\pi^2 + o(h^2)}$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{h\pi + 2h^2\pi - h^2\pi - h\pi + o(h^2)}{2h^2\pi^2 + o(h^2)}$$
$$\underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2\pi}{2h^2\pi^2}$$
$$\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$$

Donc $f'(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2\pi}$. Donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2\pi}$. Or $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1([0,1[,\mathbb{R})$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2\pi}$ par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$. Et comme $f \in \mathcal{C}^1([0,1[,\mathbb{R})$, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en 1.

Finalement, $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $f'(0) = f'(1) = \frac{1}{2\pi}$.

Partie III : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

16. On a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p^2 \leq p(p+1) \leq (p+1)^2$. Et donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}.$$

17. Par sommation, on déduit de la question précédente,

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^n \frac{1}{(p+1)^2} \leq \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \\
\Longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} && \text{télescopage} \\
\Longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - 1 \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \\
\Longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - 1 \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n.
\end{aligned}$$

On en déduit en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme elle est aussi majorée, par théorème de la limite monotone, (S_n) est convergente. On appelle $\zeta(2)$ sa limite.

Comme 2 est majorant de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par passage à la limite dans les inégalités, on a $\zeta(2) \leq 2$.

De plus, on a vu $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n$. Donc, encore par passage à la limite dans les inégalités, on a $1 \leq \zeta(2)$.

Finalement, $\zeta(2) \in [1,2]$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 14b et 15, on a

$$\forall x \in]0,1[,\ 2\sum_{k=1}^n \frac{x(x-1)}{2}\cos(2kx\pi) = f(x)\sin(2nx\pi) + \frac{x(x-1)}{2}\sin(2nx\pi) - \frac{x(x-1)}{2}.$$

De plus,

$$2\sum_{k=1}^n \frac{0\times(0-1)}{2}\cos(2k\pi\times 0) = 0 = \sum_{k=1}^n \frac{1\times(1-1)}{2}\cos(2k\pi\times 1).$$

Et aussi

$$f(0)\sin(2n\pi) + \cos(2n\pi\times 0) - 1 = 0 = f(1)\sin(2n\pi\times 1) + \cos(2n\pi) - 1.$$

Donc

$$\forall x \in [0,1],\ 2\sum_{k=1}^n \frac{x(x-1)}{2}\cos(2kx\pi) = f(x)\sin(2nx\pi) + \cos(2nx\pi) - 1.$$

On en déduit alors, puisque f est continue sur $[0,1]$,

$$2\sum_{k=1}^n A_k = 2\sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2kx\pi)dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x(x-1)}{2} \cos(2kx\pi) \right) dx \qquad \text{linéarité de l'intégrale}$$
$$= \int_0^1 \left(f(x)\sin(2nx\pi) + \frac{x(x-1)}{2}\cos(2nx\pi) - \frac{x(x-1)}{2} \right) dx$$
$$= \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx + \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2nx\pi)dx - \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}dx \qquad \text{linéarité intégrale}$$
$$= \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx + A_n - \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}dx.$$

19. En reprenant la question précédente et grâce à la question 12, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2\pi^2} &= 2\sum_{k=1}^{n} A_k \\ &= \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx + \frac{1}{4n^2\pi^2} - [x^3/6 - x^2/4]_0^1 \\ &= \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx + \frac{1}{4n^2\pi^2} + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx + \frac{1}{2n^2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

Mais on a vu à la question 13b que

$$\exists b \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx \right| \leq \frac{b}{2n\pi}.$$

Donc, par théorème des gendarmes, $\int_0^1 f(x)\sin(2nx\pi)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a également $\frac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc, par linéarité de la limite, on en déduit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$