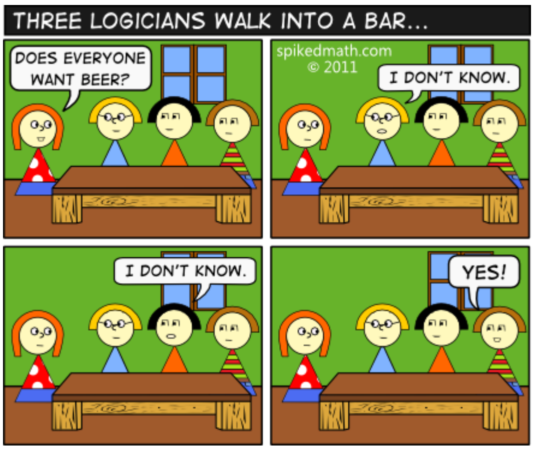
Chapitre 0
Éléments de Logique
Et Rappels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

3 septembre 2024



Avant de démarrer l'année, on va poser les bases des mathématiques. La logique. C'est le domaine qui établit les règles qui permettent d'établir des conclusions. C'est dans ce domaine qu'est définit le mot "donc", la façon dont il s'utilise et les règles qui l'encadrent.

En cas de doute d'un point de vue logique (mathématiquement parlant), se référer à ce chapitre.

> La logique est l'hygiène des mathématiques.
>
> *André Weil (1906-1998)*

> Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.
>
> *Euclide*

Table des matières

1 Quantificateurs

1.1 Définition

Définition 1.1 (Quantificateurs) :
Il y a deux quantificateurs en mathématiques :

- Le *quantificateur universel* : $\forall$ [...], qui se lit "pour tous [...]" ou "pour tout [...]" ou encore "quel que soit [...]"
- Le *quantificateur existentiel* : $\exists$ [...], qui se lit "il existe [....] tel que [...]". Le quantificateur existentiel se décline aussi en une autre version avec unicité : $\exists!$ [...] qui se lit "il existe un unique [...] tel que [...]".

Ces quantificateurs ne s'utilisent qu'à l'intérieur de phrases mathématiques. Ce ne sont pas des abréviations. La définition donne leur traduction. Et la structure grammaticale dans laquelle ils s'utilisent est : quantificateurs + sujet.

!!! ATTENTION !!!

⚠ CE NE SONT PAS DES ABRÉVIATIONS. On ne peut pas les utiliser dans une phrase en français. D'ailleurs, le programme le précise explicitement :

L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.

Il faut voir les maths comme un nouveau langage. Si vous commencer une phrase en français, il faut la finir en français. On ne passe pas du français à l'allemand dans une même phrase. Ici c'est pareil. Si vous commencer une phrase en français (donc avec des mots), vous ne pourrez pas utiliser de quantificateurs qui sont les (rares) mots mathématiques. Par exemple, NE JAMAIS ÉCRIRE : "~~Ceci est absurde puisque~~ $\cancel{x\exists}$" pour écrire "Ceci est absurde puisque x existe". En réalité, il serait écrit (en admettant que l'on puisse le faire), "Ceci est absurde puisque x il existe", ce qui n'a absolument aucun sens. Ce n'est pas la bonne façon d'utiliser le quantificateur existentiel.

La façon dont ces quantificateurs se lisent n'est que leurs traductions en français. Mais à la limite, on pourrait ne pas les traduire. Un peu comme un texte en anglais que vous arrivez à comprendre sans obligatoirement traduire chaque mot. Ici c'est pareil.

Exemple 1.1 :
On considère $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Réécrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

1. “Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a $|1/n| < \varepsilon$”.

2. “Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un réel”.

3. “Pour tout réel non nul, il existe un réel tel que le produit des deux vaut 1”.

4. “f n'est pas la fonction nulle.”

5. “f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$”.

6. “f est inférieur à g”.

Exemple 1.2 :
Si on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, à quoi correspond la phrase suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{t.q. } n \geq 2, \ \exists! s \in \mathbb{N}^*, \ \exists!(\nu_1, \ldots, \nu_s) \in (\mathbb{N}^*)^s, \ \exists(p_1, \ldots, p_s) \in \mathcal{P}^s, \quad \text{t.q. } p_1 < \cdots < p_s,$$

$$\text{t.q. } n = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\nu_k}.$$

1.2 Ordre des quantificateurs

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'ORDRE DES QUANTIFICATEURS EST FONDAMENTAL ! ! Ne SURTOUT PAS les mettre au hasards. Ça change complètement le sens de la phrase mathématique et vous passez de juste à faux en un rien de temps (si ça n'a pas de sens, bien sûr, c'est faux ...).

Exemple 1.3 :
Traduire en français les assertions mathématiques suivantes et les commenter :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$

- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$

1.3 Quantifications implicites vs. quantificateurs

Les quantificateurs sont ce qu'il y a de plus fondamentales en mathématiques. L'utilisation des quantificateurs pourra vous paraître un peu artificiel au début, la précision que ça nécessite pourra vous paraître de l'ordre du chipotage. Mais ils sont fondamentaux. Ce sont ces quantificateurs explicites qui permettent d'avoir un discours clairs en maths, *a contrario* du français qui a tendance à les sous-entendre, menant à des quiproquo et des contre-sens.

Par exemple, la phrase "$\sin(x) \neq x$" n'a pas de sens en soit. Elle ne veut rien dire. On ne peut la lire, on ne peut pas la comprendre tant qu'il n'y a pas de quantificateurs. La phrase "$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$" est évidemment fausse (prendre $x = 0$), mais la phrase "$\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$" est vraie (dès que $x \neq 0$). La véracité de la phrase change complètement selon le quantificateurs que l'on met. Le sens change. Sans quantificateurs, il est donc impossible de lire correctement les phrases mathématiques et donc, de les comprendre et par extension, de dire si elles sont vraies ou fausses.

Les quantificateurs sont toujours les éléments les plus fondamentaux, et malheureusement aussi ceux qu'on oublie le plus.

Il faut faire également la distinction entre quantification et quantificateurs. Les quantificateurs sont les symboles explicites des quantifications. Mais il peut y avoir des quantifications sans quantificateurs. C'est ce que l'on fait en français. Tout est quantifié, mais les quantificateurs sont en général implicites, sous-entendu, ,d'où naissent ambiguïtés et contre-sens.

Pour expliciter le quantificateur implicite du français, c'est souvent le sens, le contexte qui permet de pouvoir les repérer. Ce qui est dangereux. Il y a donc une interprétation de ce qui est écrit et en particulier de la partie implicite pour pouvoir l'expliciter. Ce qu'on ne fait jamais en mathématiques. Il ne doit jamais y avoir ambiguïté.

Exemple 1.4 :
Écrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1. Un nombre réel a un carré positif.

2. Un nombre réel a toujours un carré positif.

3. Tous les réels ont un carré positifs.

4. Pour tout réel x, x^2 est un réel positif.

5. Tout réel x est tel que x^2 est positif.

Exemple 1.5 :
Que pensez-vous des quantificateurs des phrases suivantes :

1. Si n est premier, alors n est impair.
2. Un français est daltonien
3. Le carré d'un réel est positif.
4. Soit E un ensemble. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensemble de E. Pour tout entier k non nul, on note B_k l'ensemble des éléments de E qui sont dans exactement k ensemble de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarque :
D'une façon générale, dans la situation où les deux quantificateurs font sens, on privilégie le quantificateur universel car il fournit plus d'informations que le quantificateur existentiel. On préfère le maximum d'informations que le trop peu d'informations.

C'est vrai également pour les relation d'ordre. Les relations d'ordre en français sont toujours à comprendre, en mathématiques, au sens le plus large (à moins d'une restriction explicite, évidemment). Donc "plus grand que" est à comprendre au sens de "supérieur ou égal à".

!!! ATTENTION !!!

En particulier, il faut prendre garde aux mots marqueurs de quantificateurs implicites. Les plus fréquents et les plus dangereux sont "*avec*" et "*où*". Il faut les proscrire autant que possible.

Exemple 1.6 :
Quels sont les quantificateurs implicites dans ces phrases :

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, alors $f(x) = f(-x)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

2. Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

3. "Pour tout entier n, n est un multiple du pgcd de a et b si, et seulement si, n peut s'écrire sous la forme $au + bv$, où $u, v \in \mathbb{Z}$"

4. $\exists! n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 < n \leq x$ où $x \in \mathbb{R}$.

1.4 De l'importance du parenthésage

Pour continuer à lever les ambiguïtés, dans les phrases mathématiques (sous entendu correctement écrites et donc avec quantificateurs explicites), ne pas hésiter à user des parenthèses pour être sûr de ne pas mal interpréter la phrase.

Exemple 1.7 :
Que pensez vous du sens des phrases suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (xy = 0)$.

Commenter les phrases suivantes et les nier :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ (|x - y| < \varepsilon \implies x = y)$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ ((\forall \varepsilon > 0,\ |x - y| < \varepsilon) \implies x = y)$

Exemple 1.8 (Les Feux de l'Amour) :
On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des personnages des Feux de l'Amour (ou tout autre série du même genre). Si $x, y \in \mathcal{P}$, on note xLy pour dire que la personne x est amoureuse de la personne y (x in love with y).

Traduire les énoncés suivants en français (*i.e.* décrire les épisodes de la série dont le synopsis se résume par la phrase mathématique suivante) :

1. $\forall x \in \mathcal{P}$, $\exists y \in \mathcal{P}$, xLy

2. $\forall x \in \mathcal{P},\ \exists y \in \mathcal{P},\ yLx$

3. $\forall x \in \mathcal{P},\ \exists y \in \mathcal{P},\ (xLy$ et $yLx)$

4. $\forall x \in \mathcal{P},\ \exists y \in \mathcal{P},\ (xLy$ et $(\exists z \in \mathcal{P},\ yLz))$

5. $\exists x, y, z \in \mathcal{P},\ (xLy$ et zLy et $x \neq y$ et $x \neq z$ et $y \neq z)$

2 Connecteurs logiques

2.1 Assertions

Définition 2.1 (Assertion) :
On appelle *assertion* (ou *proposition logique*), toute phrase mathématique pour laquelle "on peut" attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

Autrement dit, une proposition logique est une phrase mathématique ayant un sens et dont il est possible de répondre par oui ou non lorsqu'on la voie comme une question (*i.e.* si on était omniscient et omnipotent, de pouvoir dire si elle est vraie ou fausse).

Dit encore autrement, une phrase mathématique $\mathcal{P}$ (avec quantificateurs) est une assertion si la question "La phrase $\mathcal{P}$ est vraie" a un sens. Indépendamment du fait qu'on puisse dire si $\mathcal{P}$ est vraie ou non.

Exemple 2.1 :
Dire si les phrases suivantes sont des assertions ou non et si oui, peut-on donner leur véracité ?

1. 2 est un entier pair.
2. $(100+2)^2 = 100^2 + 4 + 400$
3. $1 + 4 =$
4. "Je suis un menteur"

Ce dernier exemple est le problème des énigmes bien connu du genre "Vous vous écrasez sur l'île de la vérité avec deux tribus : les Mentos et les Veritas" ou bien "Vous êtes dans une cellule avec deux portes et un gardien à chaque porte dont l'un est un menteur pathologique et l'autre est allergique au mensonge".

Remarque :
Le fait qu'il soit possible d'attribuer une valeur de vérité à une phrase ne veut pas dire qu'on puisse le faire. Il y a des phrases mathématiques qui sont indécidables, c'est-à-dire dont on ne peut déterminer

la véracité. Néanmoins, ce sont quand même des assertions : dans l'hypothèse où nous serions omniscient, on pourrait alors répondre.

On peut voir les assertions comme des sortes de questions dont on ne peut répondre que par oui ou non selon si elle est vraie ou fausse. Il faut donc bien distinguer la véracité d'une proposition du fait que la question "cette proposition est vraie" ait un sens.

> Définition 2.2 (Tautologie) :
> On appelle *tautologie* une assertion qui est toujours vraie.

La tautologie la plus connue est "Vraie". Bien sûr, Vrai est vrai. C'est une tautologie.

Exemple 2.2 :
Les phrases suivantes sont-elles des tautologies ?
- "100% des gagnants ont tentés leur chance".
- "C'est la vérité vraie".
- "Quand je danse, je danse ; quand je dors, je dors" (Montaigne, *Essais*).
- "2=2".

Remarque :
Une proposition logique qui ne peut être que fausse s'appelle une contradiction. Ces propositions sont indispensables dans les raisonnements par l'absurde.

> Définition 2.3 (Propositions logiquement équivalentes) :
> On dit que deux propositions P et Q sont *logiquement équivalentes* si elles ont toujours la même valeur de vérité (*i.e.* P et Q sont vraies ensembles et P et Q fausses en même temps). On note alors $P \iff Q$.

C'est un nouveau symbole qui se lit "[...] est (logiquement) équivalent à [...]". On ne précisera pas que cette équivalence est au sens logique. La notation permet de ne pas avoir d'ambiguïté. Et de toute façon, on fait des maths donc l'ambiguïté n'est pas vraiment permise.

On peut résumé ça par la table de vérité :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 2.3 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$n \text{ pair} \iff 2 \text{ divise } n.$$

On notera qu'une tautologie est donc une assertion logiquement équivalente à V. C'est donc une "reformulation" de V.

On va maintenant composé les propositions logiques.

2.2 Connecteurs logiques

2.2.1 Négation

Définition 2.4 (Négation d'une proposition logique) :
Soit P une assertion. On définit la négation de l'assertion P, notée $\neg P$, l'assertion ayant valeur de vérité exactement opposé à celle de P, *i.e.* qui est vraie quand P est fausse et inversement. On résume ça dans la table :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Proposition 2.1 (La négation est une involution) :
Soit P une proposition logique.
Alors $\neg(\neg P)$ est logiquement équivalente à P (*i.e.* $P \iff \neg(\neg P)$).

Démonstration :
Il suffit de dresser la table de vérité des deux et utiliser la définition de l'équivalence.

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$

□

Remarque :
La négation d'une proposition logique est complètement indépendante de la véracité de cette propo-

sition. On peut parfaitement nier une assertion fausse. On peut également nier une assertion vraie. Ce n'est qu'un jeu grammaticale indépendant du sens de l'assertion.

Exemple 2.4 :
La phrase "Je suis un menteur" a un sens, on peut la nier facilement, mais elle n'a pas de valeur de vérité. Elle n'est ni vraie, ni fausse. C'est une contradiction. D'un point de vue logique, la phrase a un sens (elle respecte les règles grammaticale de la logique de la langue française) mais la proposition qu'elle exprime ne peut être déterminé comme vraie ou fausse.

Remarque (Linguistique) :
On prendra garde au français (encore) qui (ab)use des doubles négations. Ce n'est pas que je ne veuille pas vous donner d'exemples, mais vous n'êtes pas sans avoir déjà utilisé la double négation. À ce propos, vous ferez la différence entre savoir, ne pas savoir, être sans savoir, ne pas être sans savoir, ne pas être sans jamais savoir, ne pas être jamais sans savoir, ne jamais savoir, ne jamais ne pas être sans savoir etc. Bien entendu, le français nécessite quelques contorsions linguistiques pour réussir à placer une double négation dans une phrase.

La double négation dont raffole les français est une vraie plaie pour les étrangers (en particulier les anglais). D'autant qu'elle introduit des fois des contre-sens. Elle n'est pas toujours utilisé comme elle devrait. Ce qui fait que dans certains cas, on utilise une double négation pour n'en dire qu'une seule. On citera la célèbre citation lors de catastrophe nationale : "Aucune région de France qui ne soit épargnée ..." (voir Le Figaro - Les négations dangereuses pour quelques détails supplémentaires).

2.2.2 Négation des quantificateurs

Définition 2.5 (Négation des quantificateurs) :
La négation de $\forall$ est $\exists$. Inversement, la néagtion de $\exists$ est $\forall$.

Autrement dit : "$\neg\forall = \exists$" et par involution, "$\neg\exists = \forall$".

Proposition 2.2 :
Soit $P(x)$ une proposition logique dépendant d'un paramètre x.

Alors l'assertion $\neg(\forall x, P(x))$ est logiquement équivalente à $\exists x, \neg P(x)$.

Exemple 2.5 :
Nier les phrases suivantes en français :

1. Tous les soirs, il y a des enfants qui se couchent tard.

2. Les retraités sont des personnes âgées.
3. Il existe des chiens obéissants et beiges.
4. Un arbre du parc est un chêne ou un érable.
5. Tous les animaux qui manquent d'affection sont agressifs.

Exemple 2.6 :
Nier les phrases mathématiques suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < x + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$.
3. $\forall \xi \in E$ et $\forall x \in A$, $x \leq \xi$.
4. $\forall x \in A$, $x > \sqrt{x}$ ou $\ln x > 0$.

Exemple 2.7 :
Soit les quatre assertions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

Dire si ces assertions sont vraies ou fausses et donner leur négation.

2.2.3 Conjonction

Définition 2.6 (Conjonction (et)) :
Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion composée "P et Q", notée $P \wedge Q$, qui est vraie lorsque P et Q le sont simultanément et fausse sinon. On a donc la table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposition 2.3 (La conjonction est commutative et associative) :
Soit P, Q, R trois assertions.
Alors :

(i) $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont logiquement équivalentes (*i.e.* $P \wedge Q \iff Q \wedge P$). On dit que la conjonction $\wedge$ est commutative.

(ii) $P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \wedge Q) \wedge R$ sont logiquement équivalentes (*i.e.* $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$). On dit que la conjonction $\wedge$ est associative.

Démonstration :
Il suffit d'écrire la table de vérité pour le prouver. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention, la vie courante et l'expérience fournit une intuition assez naturelle de ce fait. Mais un exemple, n'est pas une preuve. Il existe nombre de situation où l'intuition construite à partir de l'expérience (de ce qu'on a expérimenté) est en contradiction avec la réalité mathématique. Il est impératif de bien se méfier de ses intuitions. Ne pas confondre "croire que" ou "penser que" avec "savoir que" !

Exemple 2.8 :
Si P est une assertion. Que dire des assertions $P \wedge (\neg P)$, $P \wedge F$ et $P \wedge V$?

2.2.4 Disjonction

Définition 2.7 (Disjonction (ou)) :
Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion composée P ou Q, notée $P \vee Q$, l'assertion qui est vraie dès que l'une des deux assertions est vraie. On a donc la table

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque :
La disjonction n'est pas un "ou" exclusif. C'est à dire qu'il suffit que l'une des deux assertions soit vraie pour que la disjonction le soit. Ce qui est à différencier avec le "ou" exclusif qui demande que l'une et une seule des assertions soit vraie. Et pas les deux en même temps.

SI

On n'utilise que très rarement le "ou exclusif" en mathématique. Mais il est beaucoup plus utile en algèbre de Boole et notamment dans l'étude de tous les systèmes qui fonctionne sur un système "oui/non". Vous verrez ça en SII.

Proposition 2.4 (La disjonction est commutative et associative) :
Là aussi, la disjonction est commutative : $(P \vee Q) \iff (Q \vee P)$.
Et elle est aussi associative : $(P \vee (Q \vee R)) \iff ((P \vee Q) \vee R)$.

Proposition 2.5 (Loi de De Morgan) :
Soit P et Q deux propositions logiques.
Alors :

- $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$

Démonstration :
Ici aussi, il suffit d'écrire les tables de vérités.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

On a immédiatement aussi que la négation d'une conjonction est une disjonction, *i.e.*

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$$

en utilisant la propriété précédente avec $\neg P$ et $\neg Q$ puisque la négation est une involution. $\square$

Remarque :
Autrement dit, la conjonction et la disjonction sont "le contraire" l'une de l'autre.

Exemple 2.9 :
Exprimer l'assertion $P \wedge Q$ à l'aide des connecteurs logiques $\neg$ et $\vee$.

Proposition 2.6 (Propriétés algébriques de la conjonction et disjonction) :
Soit P, Q et R trois assertions. Alors

(i) $(P \wedge Q) \iff (Q \wedge P)$ [*Commutativité de* $\wedge$]

(ii) $(P \vee Q) \iff (Q \vee P)$ [*Commutativité de* $\vee$]

(iii) $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ [*Associativité de* $\wedge$]

(iv) $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$ [*Associativité de* $\vee$]

(v) $(P \vee Q) \wedge R \iff (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ [*Distributivité de* $\wedge$ *sur* $\vee$]

(vi) $(P \wedge Q) \vee R \iff (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ [*Distributivité de* $\vee$ *sur* $\wedge$]

Démonstration :
Comme précédemment, une petite table de vérité fait très bien l'affaire. Laissé en exercice. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Évidemment, il faudra faire attention au français. Il arrive qu'en français, on utilise le mot "et" pour parler, en fait, d'une disjonction de logique. Autrement dit, il arrive qu'on dise "et" pour vouloir dire "ou". Et inversement. On dit parfois "ou" alors que l'on veut dire (logiquement) "et".

Bien entendu, pour ne pas faire de contre-sens, il est impératif de repérer ces mauvais usages.

2.2.5 Implication

Définition 2.8 (Implication) :
Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion "P implique Q", notée $P \implies Q$, l'assertion $(\neg P) \vee Q$. Et sa table de vérité est

P	Q	$\neg P$	$P \implies Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Dans l'implication $P \implies Q$, P est appelée la *prémisse* ou l'hypothèse et Q est la conclusion.

⚠ Attention ! L'assertion $P \implies Q$ porte sur la flèche. La valeur logique de cette assertion porte sur le lien entre P et Q. L'assertion $P \implies Q$ peut être vraie même si Q est faux. Par exemple, $F \implies F$ est une assertion vraie, tout comme $F \implies V$.

Exemple 2.10 :
Quelle est la valeur logique de l'assertion

$$(1 = 2) \implies (2 < 3)$$

Exemple 2.11 :
Montrer que le paradoxe du buveur est vrai (sans faire de test pratique ...) :

> Dans un bar rempli, il existe une personne de ce bar telle que, si cette personne boit, alors tout le monde dans le bar boit.

Définition 2.9 (Condition nécessaire, Condition suffisante) :
Soit P et Q deux propositions logiques. Dans l'implication $P \implies Q$, P est une *condition suffisante pour avoir* Q et Q est une *condition nécessaire pour* P.

En fait, la notion de condition nécessaire ou suffisante dépend simplement du point de vue, du référentiel. Si l'on se place du point de vue de Q, alors P devient une condition suffisante. Puisque P entraîne Q, il suffit d'avoir P pour obtenir Q. Mais ce n'est pas forcément la seule façon d'avoir Q. Il suffit juste d'avoir P pour que Q soit vrai.

$$P \implies Q \qquad \triangleright$$

En sens inverse, si l'on se place du point de vue de P, l'assertion Q devient alors une condition nécessaire. En effet, Q ne peut pas être faux si P est vrai. Donc dès que P est vrai, Q doit obligatoire l'être aussi. C'est nécessaire.

$$\triangleleft \qquad P \implies Q$$

Évidemment, si une proposition est nécessaire pour en avoir une autre, elle n'a aucune raison d'être suffisante. Et inversement. La nécessité n'est pas la suffisance. Et l'un n'entraîne pas l'autre. Attention aux liens *apparemment* logique, qui ne le sont en fait pas !

> Toute condition nécessaire est nécessairement suffisante.
>
> *Devise Shadok*

Proposition 2.7 (Principe de déduction) :
Soit P et Q deux assertions.
Si P est vraie et $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vrai.

Démonstration :
Il suffit de regarder la bonne ligne dans la table de vérité de $P \implies Q$. □

Remarque :
C'est le fonctionnement du raisonnement mathématique que nous venons de voir. Et tout dépend du fait que la première proposition écrite est vraie.

Par conséquent, pour pouvoir utiliser le principe de déduction, on n'écrira que des choses vraie en mathématiques. On ne considère que des propositions vraies. De sorte que si un lien entre deux propositions est également vrai (le lien), alors on pourra "transférer" la véracité d'une proposition à l'autre.

Définition 2.10 (Principe du Tiers-Exclu) :
Pour toute proposition logique P, on a soit P vrai, soit $\neg P$ vrai. Mais au moins l'un des deux est vrai. Il n'existe pas de troisième état possible (ni l'un ni l'autre n'est vrai ou les deux en même temps).

En d'autre terme, d'un point de vue logique, le chat de Schrödinger est impossible. On ne peut avoir un chat à la fois mort et vivant. Il est soit l'un, soit l'autre ; les deux états s'excluant mutuellement. S'il est vivant, alors il n'est pas mort. S'il est mort, alors il n'est pas vivant. Il n'y a pas de troisième possibilité.

Remarque :
Le principe du tiers-exclu est fondamental. Il est le socle soutenant les raisonnements par l'absurde, par disjonction de cas, etc (voir plus bas).

Remarque (Logique naturelle vs non naturelle) :
Le système logique que l'on présente ici (avec le principe du Tiers-exclu) s'appelle *la logique naturelle*. C'est celle dans laquelle on a l'habitude de raisonner. Et avec laquelle on va continuer de raisonner.

Il est possible de créer un système logique dans lequel le principe du tiers-exclu ne serait pas vrai, *i.e.* une logique dans laquelle une proposition peut être à la fois vraie et fausse en même temps. On obtiendrai une logique cohérente mais dans laquelle, tout un tas de raisonnement ne sont plus tenable. En particulier, on ne peut plus faire de raisonnement par l'absurde ni montrer des résultats de la forme $P \implies (A \vee B)$.

Proposition 2.8 (Négation d'une implication) :
Soit P et Q deux propositions logiques.

Alors
$$\neg(P \implies Q) \iff (P \wedge (\neg Q))$$

Démonstration :
Il suffit d'écrire la définition de l'implication et de la nier :

$$\begin{aligned}
\neg(P \implies Q) &\iff \neg((\neg P) \vee Q) && \text{def implication} \\
&\iff (\neg(\neg P)) \wedge (\neg Q) && \text{loi de De Morgan} \\
&\iff P \wedge (\neg Q) && \text{involution de } \neg
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.12 :
Nier les assertions suivantes :

1. Je pense, donc je suis.

2. Pour avoir de bonnes notes, il faut travailler.

3. Je suis une fille, donc je suis nulle en maths.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\implies$ n pair.

5. $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $(n\sqrt{2} + m\sqrt{3} = 0) \implies (n = m = 0)$.

6. $\forall M > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x > x_0) \implies (f(x) > M)$.

2.2.6 Équivalence, contraposée, réciproque

Proposition 2.9 (Équivalence) :
Soit P et Q deux propositions logiques.
L'assertion $P \iff Q$ est logiquement équivalente à $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Démonstration :

La table de vérité est

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

P	Q	$P \iff Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

□

Remarque :
Ce qui justifie a posteriori le choix du vocabulaire. Et une équivalence est donc une double implication. C'est une implication dans les deux sens.

Exemple 2.13 :
Soit P et Q deux propositions logiques. Exprimer $P \iff Q$ à l'aide des connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, puis uniquement à l'aide de $\neg$ et $\wedge$.

Exemple 2.14 :
Montrer que les assertions $P \iff P$, $(P \wedge Q) \implies P$ et $P \implies (P \vee Q)$ sont des tautologies sans utiliser de tables de vérités.

Remarque (Condition nécessaire et suffisante) :
Si on considère une proposition P, trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir P correspond donc à trouver une proposition Q qui soit à la fois suffisante pour avoir P (donc $Q \implies P$) et qui soit également une condition nécessaire pour avoir P (donc $P \implies Q$). Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour avoir P est une proposition Q équivalente à P.

Définition 2.11 (Contraposée) :
Soit P et Q deux propositions logiques. On appelle *contraposée* de $P \implies Q$ l'assertion $(\neg Q) \implies (\neg P)$.

⚠ Attention ! On ne parle de contraposée que pour une implication. La contraposée se rapporte à un sens de parcourt, un déplacement. Une proposition logique, en elle même, est un objet inerte. Qui peut être vraie ou fausse. Mais ça ne bouge pas. Une contraposée est relative à un lien entre deux assertions, un déplacement de l'une vers une autre.

Proposition 2.10 (Valeur logique de la contraposée) :
Soit P et Q deux assertions. Alors

$$(P \implies Q) \iff \Big((\neg Q) \implies (\neg P)\Big)$$

Démonstration :
On a l'habitude, on écrit la table de vérité.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \implies (\neg P)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

□

Remarque :
Donc la contraposée d'une implication a la même valeur logique que l'implication de base. Du coup, pour démontrer une implication (un lien entre deux proposition), on peut donc démontrer la contraposée à la place. Il peut arriver que la contraposée d'une implication soit plus facile à prouver que l'implication elle-même.

Exemple 2.15 :
Exprimer les contraposées des assertions suivantes (indépendamment de leur véracité) :

1. Je pense, donc je suis.

2. Pour avoir de bonnes, il faut travailler.

3. Je suis une fille, donc je suis nulle en maths.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\implies$ n pair.

Remarque :
Attention, la contraposée n'est pas la négation de l'implication (ce serait incohérent puisque la contraposée est logiquement équivalente à l'implication dont elle est la contraposée).

Prendre par exemple la phrase : “On ne peut pas boire d'alcool aux États-Unis avant ses 21 ans”. La négation est ”Un jeune de moins de 21 ans a bu de l'alcool aux États-Unis”. Et la contraposée : ”Dans certains pays ailleurs qu'aux États-Unis, on peut boire de l'alcool avant ses 21 ans”.

Définition 2.12 (Réciproque) :
Soit P et Q deux propositions logiques. La *réciproque* de l'assertion $P \implies Q$ est l'assertion $Q \implies P$.

Remarque :
Une équivalence logique est donc la conjonction d'une implication logique et de sa réciproque.

Exemple 2.16 :
Exprimer les réciproques des assertions suivantes (indépendamment de leur véracité) :

1. Je pense, donc je suis.

2. Pour avoir de bonnes, il faut travailler.

3. Je suis une fille, donc je suis nulle en maths.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\implies$ n pair.

3 Modes de raisonnements

3.1 Principes de rédaction en mathématiques

Un texte mathématique est toujours rédigé. Il doit y avoir un développement logique et une conclusion. Et le développement doit bien sûr être structuré, avec des connecteurs logiques. C'est un texte qui doit pouvoir se lire et se comprendre clairement. Comme une rédaction. Sans rédaction, le texte ne peut pas être compréhensible.

> Qualité de la rédaction, orthographe correcte et présentation claire sont indispensables. La note finale, quelle que soit la discipline, reflétera très souvent ces aspects. La négligence ne paie pas. [*Mines-Ponts 2020*]

> La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus. Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. [*Mines-Ponts 2022*]

Exemple 3.1 :

Énoncé : Montrer que le carré de tout entier pair est encore pair.

Démo : Soit n un entier pair. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times (2p^2)$ et donc n^2 est pair.
On vient donc de montrer que le carré de tous nombre pair est pair.

On prendra garde spécifiquement aux définitions, à la dénomination des objets mathématiques qui est précise. Le vocabulaire utilisé doit être le plus précis possible.

En particulier, on prendra garde à la notion de condition nécessaire et de condition suffisante relative à une proposition donnée.

Les règles de rédaction en maths sont les suivantes :

- **Introduire ce dont on parle**. Toujours définir tous les objets en présence. Ne jamais laisser un élément qui n'est pas défini. Et il faut toujours définir les éléments dont on va avoir besoin AVANT de les utiliser. Comme au cinéma. Il y a toujours le casting des acteurs principaux avant le film.
  - Si l'on veut introduire un objet quelconque x d'un ensemble donné E, il faut écrire "soit $x \in E$". Écrire cela revient à prendre un élément de E. Mais comme il n'y a aucune précision sur cet élément, il est quelconque. C'est un représentant de tous les éléments. Il joue le rôle de n'importe quel élément de E
  - Si l'on veut introduire un objet que l'on va souvent utilisé pour clarifier le discours, par exemple dans le cas d'une expression un peu lourd. On écrira alors "On pose $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$".
  - Définir les abréviations qu'on sera amené à utiliser dans la rédaction. Toutes les abréviations ne sont pas universellement partagées. D'une manière générale, il vaut mieux les éviter. De même pour les notations qui sortent de l'ordinaire.

  > Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie ≪ il suffit de montrer que ≫ ? [*Mines-Ponts 2022*]

- **Mettre en évidence les articulations logiques**.
  En écrivant un raisonnement mathématiques, il est absolument impératif d'indiquer les liens logiques qui permettent de passer d'une phrases à une autre. C'est absolument indispensable. C'est ce qui donne un sens au texte.

> Ce qui nous a frappés dans un grand nombre de copies, ce sont le manque d'attention aux définitions données au début du problème, l'indifférence à la nécessité de justifier toutes les assertions et l'impression que leur auteur se contente de donner les grandes lignes de la démonstration, à charge pour le correcteur de combler lui-même les lacunes du raisonnement. À l'inverse, certains candidats se sont montrés attentifs, rigoureux et scrupuleux, et bien que n'ayant pas toujours avancé jusqu'au bout du problème, se sont vu récompensés par une note plus qu'honorable de leurs efforts, bien meilleure que celle d'autres candidats qui, se promenant jusqu'au bout du sujet en écrivant sur chaque question quelques lignes sans logique aucune, n'en ont tiré que de rares points par la rare chance d'affirmations élémentaires [*Mines-Ponts 2021*]

ATTENTION ! Tous les connecteurs ne sont pas les mêmes, ils ne sont pas interchangeables. Mais surtout, le symbole $\Longrightarrow$ ne peut pas être utilisé n'importe comment et surtout pas comme abréviation du mot "donc". Si vous écrivez en français, alors il faut écrire en français. Si vous écrivez en maths, ce sont des propositions logiques du premier ordre (donc ce qui est dans le début de ce cours) et là, le symbole est autorisé. Il faut bien distinguer les deux situations et les différences linguistiques lié aux deux.

En particulier, faites bien attention au style. Éviter au maximum les effets de style et les figures de rhétoriques. Soyez simples et efficaces. Prenez gardes aux tics de langages et particulièrement à l'oral. Un "donc" est un donc. Même si vous l'employez pour ponctuer votre discours, il sera compris comme un connecteur logique. Et s'il n'a pas lieu d'être (ce qui est fort probable à l'endroit d'une ponctuation), vous serez pénalisé pour avoir fait une faute de logique. Soyez très attentifs.

> Quant aux connecteurs logiques $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer ≪ donc ≫, ≪ ainsi ≫, ≪ c'est pourquoi ≫, etc. [*Mines-Ponts 2022*]

- **Annoncer ce que l'on va faire**.

  N'hésitez pas à prévenir de vos intuitions. Ça aide le lecteur à suivre votre raisonnement. Il peut arriver que vous deviez vous lancer dans un raisonnement de plusieurs page. Par exemple, un raisonnement par l'absurde. Si vous préciser que c'est votre intention avant de vous lancer dedans, le lecteur sait à quoi s'attendre. Il sait donc qu'une hypothèse doit être faite. Elle n'est donc pas parachuter de nulle part au milieu de la page.

  Il ne faut donc surtout pas hésiter à démarrer une démonstration par "Montrons que ...". On peut même user (et abuser) des fameux "Je sais que ...". Ça permet de poser les choses clairement.

- **Prendre garde à la nature, au type, des objets que l'on manipule**.

  Tous les objets n'ont pas la même nature et on ne peut pas les manipuler tous de la même manière. Par exemple, une fonction n'est pas un réel, qui n'est pas un complexe. Il y a des choses autorisé sur les complexes qui ne le sont pas sur les fonctions.

  > Mentionnons quelques difficultés rencontrées dans les copies et qui devraient être absentes : [...] certains candidats confondent une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et le nombre complexe $f(x)$. [*Centrale 2021*]

3.2 Rédactions types

À prouver	Rédaction
$P \implies Q$	Supposons P. Montrons Q. [...] Donc Q. Conclusion : $P \implies Q$.
$P \wedge Q$	Montrons P et Q. [...] donc P. [...] donc Q. Conclusion : $P \wedge Q$.
$P \vee Q$	Supposons $\neg P$ et montrons Q. [...] donc Q. Conclusion $\neg P \implies Q$ est vraie donc $P \vee Q$ est vraie.
$P \iff Q$	Supposons P et montrons Q. [...] donc Q. Supposons Q et montrons P [...] donc P. On a donc bien $P \iff Q$.
$\forall x \in E,\ P(x)$	Soit $x \in E$. Montrons $P(x)$. [...] Donc $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie.
	$\forall x \in E, Q(x) \implies [\ldots] \implies \forall x \in E, P(x)$.
$\exists x \in E,\ P(x)$	Posons $x_0 = ... \in E$. Alors [...] donc $P(x_0)$. Conclusion : $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie. (La difficulté est de trouver la valeur de x_0, il faut l'exhiber).

Le plus délicat est la preuve d'un énoncé du type : "$\forall x \in E,\ P(x)$". Il faut faire très attention à la rédaction. Il y a deux façons d'abordés le problème. Soit, pour prouver une proposition valable pour tous les éléments, on en prend un au hasard quelconque qui va représenter tous les autres éléments, et on va raisonner avec cet élément quelconque. C'est ce qu'on l'on fait en démarrant avec "Soit $x \in E$". On extrait un élément quelconque x de E et on raisonne avec cet élément. Une fois la conclusion aboutit, comme l'élément x peut être n'importe quel élément de E, le raisonnement est donc valable pour n'importe quel élément de E et donc pour tous les éléments de E. Dans cette rédaction, la lettre x est parfaitement déterminée.

Autrement, il est possible de démontrer l'énoncé d'un point de vue purement logique. On considère l'assertion "$\forall x \in E, P(x)$" dans son ensemble est on raisonne sur cette proposition entière. Auquel cas, toutes les autres propositions logiques qui en découlent dépendent d'un élément x qui n'est défini de façon absolut et il faudra donc réécrire un $\forall x$ à chaque nouvelle proposition logique que l'on déduit puisqu'un élément utilisé ne peut pas ne pas être défini.

Philosophiquement, dans le premier cas, on extrait un élément quelconque qui va représenté, qui jouera le rôle de tous les éléments, mais on ne travail qu'avec un seul élément et il est alors bien défini ; dans le second cas, on les manipule tous en même temps en manipulant la proposition logique dans son ensemble donc avec les quantificateurs définissant les éventuels paramètres dont dépend la proposition.

Dans tous les cas, il faudra bien prendre garde à définir en permanence tous les éléments interviennent. Il faut penser au casting.

On verra de nombreux exemples dans les chapitres à venir.

3.3 Manipulation des quantificateurs d'une proposition dans une démonstration

Dans une démonstration, on écrit des maths, donc des quantificateurs. Il y a essentiellement deux cadres à bien différencier dans lesquels on utilise des propositions mathématiques dans une démonstration.

- Pour la proposition à prouver. Évidemment, une proposition qui doit être prouvée contient des quantificateurs. En fait, la preuve porte presque plus sur les quantificateurs que sur les propriétés vérifiées par les éléments de la proposition (pour être tout à fait précis, la preuve porte plus exactement sur les propriétés des éléments compte tenu des quantificateurs). On ne peut bien sûr par manipuler directement les quantificateurs de la proposition à prouver. Précisément parce qu'on doit les prouver et donc on est pas encore sûr que ce soit vrai.
  - Preuve d'une proposition qui commence par $\forall$.

    Dans ce cas, on doit prouver que la proposition est vraie pour toutes les valeurs possibles des variables. On ne peut donc, en aucun cas, choisir une valeur spécifique d'une valeur variable. Sinon, on aura pas la preuve pour toutes les valeurs, mais seulement celle choisie. Il faut donc manipuler toute les valeurs en même temps. On a deux options pour le faire.

    — Soit (et c'est recommandé), on démarre la preuve par "soit $x \in E$". Ce qui revient à choisir un élément fixé (x) et raisonner dessus. Comme aucune contrainte n'est imposée sur cet élément, c'est un élément générique, il peut être remplacé par n'importe quel autre. C'est un représentant abstrait et générique de tous les éléments de l'ensemble E. Donc le raisonnement peut s'appliquer avec n'importe quel valeur de x dans E possible. Et donc le raisonnement est vrai pour toutes les valeurs de E. Donc on a bien démontré le $\forall x \in E$.

    Attention, dans ce cas, la lettre x est prise et fixée dans tous le raisonnement. On ne peut plus l'utiliser pour autre chose. La lettre x fait référence, dans tous ce raisonnement, uniquement à l'élément générique que l'on a choisi. On aurait pu l'appeler x_0 pour bien spécifier qu'il fixé (mais inconnu) et que l'on ne peut plus réutiliser cette lettre.

    — Soit on utilise directement un $\forall x \in E$. Dans ce cas, la variable x est muette et on peut changer la lettre à n'importe quel moment. Elle est libre d'utilisation d'ailleurs pour autre chose.

    L'inconvénient majeure de cette méthode est qu'elle nécessite de réutiliser le $\forall$ à toutes les lignes. En effet, la lettre x n'est pas clairement défini et n'a de sens dans une phrase que parce qu'il y a le $\forall$ qui la définie. C'est une variable muette. Ça alourdit alors beaucoup la rédaction.

  - Preuve d'une proposition qui démarre par $\exists$.

    Là, il n'y a pas tellement le choix. Il faut prouver qu'il existe (au moins) une valeur de x pour laquelle la proposition est vraie. Donc il faut l'exhiber. Il faut la donner (au moins une).

C'est la preuve du pudding. La preuve que le pudding existe, c'est quand on le mange.

- Pour une proposition qu'on utilise. Au sein d'une démonstration, on utilise des théorèmes qui sont déjà sus. On utilise donc régulièrement des propositions mathématiques, sans avoir besoin de les prouver.

  Dans le cas d'une proposition qui démarre avec un $\exists$ que l'on utilise, alors la variable x correspond à l'une de celles autorisées par la proposition vérifiant la propriété. Il est utile dans ce cas de l'appeler x_0 pour indiquer c'est une variable fixée qui a des propriétés particulières. C'est l'un des x_0 qui vérifie la proposition. Mais la valeur de x_0 précisément, n'est pas forcément connu. On sait juste qu'il existe.

  Dans le cas d'une proposition qui démarre avec un $\forall$, c'est beaucoup plus libre. C'est une proposition qui fonction pour tous les éléments E. Comme c'est vrai pour tous, en général, ils ne nous intéressent pas tous, mais seulement certains. Donc on peut choisir une valeur spécifique pour x. Celle qui nous arrange.

Il faut donc prendre garde au rôle joué par la proposition que vous considérez dans le cadre de votre raisonnement. On ne la manipule pas selon que c'est le but de la preuve ou si c'est une donnée.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Les quantificateurs ne sont pas des abréviations ! Le programme écrit d'ailleurs (et à juste titre) : "L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu". Attention donc au langage que vous utilisez. Soit vous écrivez en français, il faudra tout écrire en français ; soit vous écrivez en maths, il ne faudra pas de mots. Mais on ne peut pas jouer sur les deux langages en même temps. Entre autre parce que les règles grammaticales ne sont pas les mêmes dans les deux langages et certaines rentrent même en contradictions.

Remarque :
On notera que l'utilisation d'un quantificateur a une influence sémantique sur la variable même. L'utilisation d'un quantificateur universel "mutifie" la variable. Elle devient une variable. C'est la différence essentielle avec l'utilisation du mot "soit".

Un raisonnement avec un $\forall x$ ou un "Soit x" auront la même valeur. Mais il y a une distinction sémantique entre les deux. Avec la locution "Soit x", on définit un élément qui s'appelle x et qui est fixé. C'est toujours le même. Mais dans la mesure où on ne lui impose rien, c'est donc un représentant (générique) de tous les éléments de l'ensemble. La lettre, le symbole "x" est donc occupé et fait référence à l'élément introduit en début de raisonnement.

En revanche, l'utilisation "$\forall x$" permet de mutifier la variable. Son nom n'a plus d'importances. La lettre x n'est alors là que pour savoir de qui on parle dans la phrase en question. Mais on pourrait, dans la phrase suivant, la remplacer par un autre symbole, sans changer le sens. Le quantificateur permet de donner les moyens de lire la phrase mathématique en donnant un sens local aux symboles qui apparaissent. Dès la phrase terminée, le symbole "x" est alors libre et peut être réutiliser pour autre chose (ou pas).

Exemple 3.2 :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ (|x|-1)^2 \geq 0 &\iff \forall \bigstar \in \mathbb{R},\ \bigstar^2 - 2|\bigstar| + 1 \geq 0 \\
&\iff \forall \heartsuit \in \mathbb{R},\ 2|\heartsuit| \leq \heartsuit^2 + 1 \\
&\iff \forall \clubsuit \in \mathbb{R},\ \frac{2|\clubsuit|}{\clubsuit^2+1} \leq 1 \\
&\iff \forall \diamondsuit \in \mathbb{R},\ -1 \leq \frac{2\diamondsuit}{\diamondsuit^2+1} \leq 1
\end{aligned}$$

3.4 Règle de présentation de la rédaction

La rédaction mathématique est, d'un point de vue présentation, très réglementé. On ne peut pas faire ce qu'on veut. Mais heureusement, les règles sont très simples et très peu nombreuses (comme toujours en maths, en fait ...).

- **Pour un calcul :** Il n'y a que deux façon de présenter un calcul. Soit il tient sur une seule ligne et on peut alors tout mettre sur une seule ligne avec les signe $=$ à la suite les uns des autres ; Soit il est trop long et ne tient pas sur une seule ligne. Dans ce cas là, les signes égales doivent alignés sur une seule colonne. On doit donc avoir un seul signe égal par ligne et tous bien alignés verticalement.

  Exemple 3.3 :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

  Ou

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) &= \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} k \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} k} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les barres de fraction doivent être alignés avec le centre du signe égal.

- **Pour un raisonnement (équivalences, implications ...) :** Dans ce cas là, il faut présenter les choses sous forme de colonnes avec les signes logiques alignés verticalement. Comme pour la présentation en colonne d'un calcul.

  Exemple 3.4 :
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x)^3 - \sin(x)^3 = 0 &\iff (\cos(x) - \sin(x))(\cos(x)^2 + \cos(x)\sin(x) + \sin(x)^2) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \cos(x) = \sin(x) \\ \text{ou} \\ 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \cos(x) = \cos(\pi/2 - x) \\ \text{ou} \\ \sin(2x) = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -(\frac{\pi}{2} - x) + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 0 = -\pi/2 + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]
\end{aligned}$$

- **Pour les justifications :** Les justifications doivent être ***SUR*** la ligne où on l'utilise, à droite.

  > La troisième partie plus calculatoire n'a pas toujours rapporté les points escomptés par les candidats puisque les justifications des calculs n'étaient pas présentes. [*CCINP 2022*]

  Exemple 3.5 :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) &= \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} k && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k} && \text{simplifications}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} && \text{changement d'indice}\\
&= \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} && \text{factorisation et def factorielle}\\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!} && \text{def factorielle}
\end{aligned}$$

Remarque :
Dans la mesure où TOUT *DOIT* être justifié (et surtout le reste), il va sans dire que la présentation en colonne d'un calcul est à préférer.

> Les correcteurs rappellent aux candidats que toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées [...]. [*CCINP 2022*]

La précision avec laquelle le raisonnement doit être justifié est un problème difficile et délicat auquel aucune réponse claire ne peut être apporté. On peut toujours remonter, "détricoter" les raisonnements pour revenir aux éléments les plus fondamentaux (et revenir au programme de 6ème par exemple). Mais ce serait clairement une perte de temps. Il faut donc trouver un équilibre subtile entre clarté, solidité du raisonnement et rentabilité.

Globalement, il y a deux paramètres à prendre en compte pour établir le niveau de détail des justifications attendus :

- **La qualité globale de la copie.** Le "droit à l'arnaque" est un droit qui se gagne et se mérite. Plus vous aurez justifié correctement quelque chose, plus vous pourrez vous permettre d'être "laxiste" sur la prochaine apparition du même genre de raisonnement. Mais il faut d'abord avoir "montré pattes blanches" et donc montrer que vous savez rédiger correctement pour vous permettre d'escamoter un raisonnement par la suite. Par exemple, vous ne pouvez en aucun cas ne pas faire la première récurrence d'un sujet en écrivant seulement "récurrence facile". Si elle est facile, alors faites la. Une fois correctement rédigée, vous aurez montré que vous savez traiter les récurrences correctement. Et donc, pour la prochaine apparition d'une récurrence facile du même genre, vous pourrez alors vous permettre plus de liberté.

  Donc meilleure est votre copie, plus vous pourrez vous permettre des libertés. C'est comme pour la ligue Pokémon : vous devez d'abord gagner les différentes badges des différentes arènes pour montrer que vous mériter d'accéder à la ligne Pokémon.

- **La nature des questions.** C'est probablement le point le plus délicat à identifier. L'idée est maîtresse est que vous devez montrer des compétences. Donc vous devez faire quelque chose d'intéressant. Si une question correspond "juste" à refaire le cours, c'est donc que c'est ce qu'on attend. C'est une question de cours et vous devez donc réécrire le cours. Avec tous les détails. Vous devez refaire un cours. Un cours complet. On attend de vous la restitution du cours. Qu'on pourrait alors redonnez à de nouveaux étudiants.

  Si la question est plus compliqué, qu'il faut utiliser des théorèmes du cours, mélangés avec des questions déjà faites, les agencer dans un certain ordre et vérifier que toutes les hypothèses de ces théorèmes et résultats préalables sont effectivement bien présents, alors vous pourrez vous permettre d'être plus "léger" et de moins creuser.

L'identification des questions de cours est cruciale. C'est sur ces question qu'on attend le plus de détails et la rédaction la plus rigoureuse. L'identification des différentes natures des questions fait partie des compétences attendues. Et c'est nécessaire pour ne pas faire de hors-sujet.

3.5 Raisonnements classiques

!!! ATTENTION !!!

⚠ Les automatismes sont vires ennemis. Un automatisme est, par définition, l'anesthésie de la raison. C'est l'absence de réflexion. Ce qui va à l'encontre de toute la philosophie des mathématiques.

Si vous fonctionner par automatisme, il sera alors facile de démonter votre argument. Il y a peu de chance que puissiez expliquer le fonctionnement de vos arguments en profondeur et donc, en posant des questions suffisamment profonde, on pourra vous faire tomber.

De plus, si vous prenez l'habitude d'utiliser toujours le même type de raisonnement dans une situation donnée, il sera toujours possible de vous piéger en fabriquant une situation qui vous donne envie d'utiliser vos automatismes sans qu'ils puissent aboutir à quoi que ce soit.

Les automatismes sont anti-mathématique.

3.5.1 Raisonnement direct

C'est le type de raisonnement le plus simple et le plus courant. On part des hypothèses et on va, de façon directe, à la conclusion.

Exemple 3.6 :
Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.

3.5.2 Raisonnement par l'absurde

C'est un raisonnement indirecte.Le but est de montrer que la proposition P que l'on veut prouver, ne peut pas être fausse. On commence donc par supposer que la négation $\neg P$ de la conclusion est vraie (ainsi que les hypothèses, bien sûr) et on doit aboutir à une contradiction. On montre ainsi que P ne peut pas ne pas être vraie. Et donc P est vraie.

Évidemment, on fera attention à la rédaction de la preuve dans son entièreté.

> L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses : des démonstrations par l'absurde se terminent par ≪ donc impossible ≫. [*Mines-Ponts 2020*]

Exemple 3.7 :
En utilisant des raisonnements par l'absurde :

1. En utilisant $A = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n\sqrt{2} \in \mathbb{N}^*\}$, montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple 3.8 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$.

1. Montrer que si $a + c = b + d$, alors $a = b$ et $c = d$.
2. Montrer que si $c < d$, alors $a + c < b + d$.

3.5.3 Raisonnement par contraposition

L'idée est, pour montrer une implication $P \implies Q$, d'utiliser la contraposée de cette implication qui a la même valeur logique (cf un peu plus haut dans ce cours). On se ramène donc à prouver une autre implication, avec de nouvelles hypothèses (ici $\neg Q$).

Comme on se ramène à prouver une autre implication, on peut très bien montrer $\neg Q \implies \neg P$ à l'aide d'autres types de raisonnement. On peut mélanger les types de raisonnement. On peut par exemple prouver la contraposée par récurrence, ou par l'absurde. Il faut juste ne pas démontrer la contraposée par contraposée, sinon on revient au raisonnement direct ...

Exemple 3.9 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\left[\forall m \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 \neq 8m\right] \implies [n \text{ pair}]$$

Exemple 3.10 :
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.

3.5.4 Raisonnement par disjonction de cas

Ce raisonnement est utile seulement pour démontrer des implications qui dépendant d'un paramètre, donc pour les implications de la forme $P(x) \implies Q(x)$.

Pour montrer que $P(x) \implies Q(x)$, il peut être pratique de distinguer des cas selon x qui permettent de simplifier les propositions $P(x)$ et $Q(x)$.

Il faut cependant prendre bien garde à étudier tous les cas possibles pour ne pas oublier de valeurs possibles du paramètre.

Exemple 3.11 :
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Exemple 3.12 :
Montrer qu'il existe x, y deux irrationnels, tels que x^y soit rationnel.

Remarque :
Un raisonnement par disjonction de cas doit être utilisé judicieusement. Il ne doit intervenir que dans une situation où c'est naturelle (donc obligatoire) de faire une disjonction de cas. Et surtout, la disjonction de cas (donc les différents qu'on est en train de faire) doit être, elle aussi, naturelle. Autrement dit, il faut des arguments, une raison pour faire chacun des cas de la disjonction. Ce ne doit pas être juste une idée comme ça. Chaque cas doit répondre à un besoin, une nécessité pour qu'il puise servir (au sens utilitaire du terme, d'un outil) à quelque chose dans le raisonnement.

Exemple 3.13 :
Montrer :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z},\ (n + m\sqrt{2} = 0 \iff n = m = 0).$$

3.5.5 Raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement est utile pour montrer une propriété P_n qui dépend d'un paramètre entier naturel n (mais ne fonctionne pas toujours, ou n'est pas toujours la meilleure solution). L'idée est de réutiliser le principe de transmission d'un caractère héréditaire en biologie (comme la couleur des yeux). Le raisonnement se fait alors en 3 étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel la proposition P_{n_0} est vraie (en général, il suffit de tester pour les premières valeurs de n).
  Pour que la propriété se transmette, il faut déjà qu'elle soit vraie à un moment donné. Autrement dit, pour que des yeux marrons de transmettent de générations en générations dans une famille, il faut déjà qu'une personne de la famille ait les yeux marrons. Il faut que cette couleur apparaisse à un moment donné. Sans quoi, on ne peut pas la transmettre. Mais ce n'est pas forcément le premier ancêtre.
- **Hérédité** : On considère un entier n quelconque supérieur ou égal à n_0. On suppose alors que P_n est vraie et on montre que P_{n+1} est vraie aussi.
  C'est là que l'on montre que le caractère est effectivement héréditaire, qu'il se transmet de génération en génération. Et pour qu'il se transmette, bien entendu, il faut se placer à un moment donné où le caractère est apparu, après la première fois où il apparaît. Sans quoi, on ne peut rien transmettre... Et on vérifie ensuite que si une génération à ce caractère, alors elle le transmet à la génération suivante qui a aussi le caractère.
- **Conclusion** : On en déduit donc que $\forall n \geq n_0$, P_n est vraie.
  On a donc montré que le caractère qui nous intéresse apparaît à un moment donné dans la famille (en n_0), puis que ce caractère se transmet (il est héréditaire). Le processus se répète indéfiniment et donc on peut en déduire que le caractère apparaît chez tous les individus à partir de la première apparition (donc pour tout $n \geq n_0$).

Exemple 3.14 :
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $n^3 + 5n$.

Remarque :
D'une façon générale, les raisonnements par récurrences sont utiles lorsque l'on a une relation de récurrence. Il faut avoir un lien entre les différentes générations pour pouvoir transmettre la propriété.

Dans une version formalisée, on a :

Théorème 3.1 (Principe de récurrence (simple)) :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propriétés dépendantes du paramètre n. Si :
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} est vraie [Initialisation]
- $\forall n \geq n_0$, $[P_n$ vraie $\implies P_{n+1}$ vraie$]$ [Hérédité]

alors les propriétés P_n sont vraies pour tout $n \geq n_0$.

Raisonnement bien connu depuis la terminale. En fait, il existe d'autres types de raisonnement par récurrence. Le principe générale est le même. Seul l'étape de l'hérédité diffère. On présente ici les deux autres plus importants.

Un cas fréquent est lorsque l'on a besoin de deux générations successives pour engendré une nouvelle. Il faut donc faire une hypothèse sur deux rangs successif. C'est ce qu'on appelle une récurrence double (avec le double d'hypothèses).

Corollaire 3.2 (Récurrence double) :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'assertion dépendantes de n. Si :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vraies
- $\forall n \geq n_0$, $\Big[[P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ vraies}] \implies P_{n+2} \text{ vraie}\Big]$

alors P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On peut évidement généraliser la double récurrence à la triple récurrence, quadruple, etc..., bien que la triple récurrence est déjà assez rare.

Remarque :
Avec une relation de récurrence d'ordre 1, ce sont les récurrences simples qui sont le plus adaptées ; avec une relation de récurrence d'ordre 2, c'est une récurrence double ; avec une relation de récurrence triples, c'est une récurrence triple etc.

Par exemple, avec une suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n - 1$, on utilisera (si besoin) une récurrence simple ; avec une suite vérifiant $u_{n+2} = 2u_{n+1}^2 - 3u_n^2$, on utilisera (si besoin) une récurrence double ; etc.

⚠ Attention ! Ce n'est pas parce qu'une suite vérifie une relation de récurrence qu'il faut tout démontrer par récurrence. Les récurrences sont des raisonnements un peu lourd et pas toujours les plus efficaces. Il faut d'abord privilégiés le raisonnement direct. Les récurrences, ce n'est pas automatique.

Il existe un autre type de récurrence, plus délicate.

Corollaire 3.3 (Récurrence forte) :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'assertion dépendantes de n. Si :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} est vraie
- $\forall n \geq n_0$, $\Big[[P_{n_0}, P_{n_0+1}, \dots, P_n \text{ vraies}] \implies P_{n+1} \text{ vraie}\Big]$

alors P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ici le nombre de proposition vraie à vérifier pour l'hérédité dépend de n ! Il faut en vérifier une de plus à chaque étape ! Et donc, il y a un quantificateurs universel en plus à manipuler.

Bien sûr on a les relations :

Récurrence forte	$\Longrightarrow$ [...] $\Longrightarrow$	Récurrence triple	$\Longrightarrow$	Récurrence double	$\Longrightarrow$	Récurrence simple

Exemple 3.15 :

1. On pose $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ (suite de Fibonacci). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \leq (5/3)^n$.
2. On pose $u_1 = 3$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Calculer u_2, u_3 et u_4, puis montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n = 3n$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $\exists p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$, p_n impair, tels que $u_n = \frac{p_n}{2q_n}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geq 2$, alors $u_n \notin \mathbb{N}$.

Remarque :
Il existe d'autres types de raisonnement par récurrence un peu bizarre.

Exemple 3.16 :
On se propose de montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On introduit la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)\ :\ \text{“}\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\text{”}.$$

1. Montrer que c'est vrai pour $n = 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n-1)$ l'est également.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(n)$ et $P(2)$ sont vraies, alors $P(2n)$ est vraie.
4. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Bien prendre garde à la façon dont on définie les choses. Il vaut mieux éviter de définir la propriété que l'on montre par récurrence. Tout est dans les quantificateurs. Si vous mettez un $\forall$ quelque part dans une récurrence, ça détruit le raisonnement par récurrence. S'il apparaît dans la définition de la propriété, alors vous supposez ce que vous voulez démontrer. Et donc plus besoin de s'embêter à faire la démo.

Il vaut mieux rester simple et écrire seulement ce dont on a besoin. Inutile de faire des chichis en rajoutant en lourdeur stylistique ce qui n'est pas utile.

Éventuellement, vous pouvez annoncer que vous allez procéder à un raisonnement par récurrence (et éventuellement quel type, simple, double etc), mais ce n'est pas vraiment la peine non plus. Si la rédaction est clair, on voit bien que c'est une démo par récurrence qui est faite.

3.5.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une sorte de raisonnement “à rebours”. Dans les autres types de raisonnements, on part des hypothèses que l'on manipule, transforme pour arriver à la conclusion voulue. Le raisonnement par analyse-synthèse intervient quand on ne voit pas de lien, de chemin pour aller des hypothèses à la conclusion. Le but est d'alors d'étudier la conclusion que l'on veut pour mieux la comprendre et éventuellement la reformuler, afin d'obtenir une proposition plus facile à prouver à partir des hypothèses dont on dispose.

Ce raisonnement se déroule en deux étapes :

— **L'analyse :** on s'intéresse à la conclusion qu'on essaie d'analyser pour mieux la comprendre. D'une façon générale, cette étape consiste essentiellement en une reformulation de cette conclusion afin d'avoir une formulation qui se rapproche des hypothèses dont on dispose.

— **La synthèse :** elle consiste essentiellement en ce qui a été fait dans l'analyse pour recoller les morceaux avec les hypothèses. D'une façon générale, la synthèse consiste juste à rajouter les éventuels bout qui manque de l'analyse pour terminer la démonstration (réciproque, vérification ...). Dans la majorité des cas, elle est même simplement la réécriture de l'analyse dans l'autre sens (l'analyse part de la conclusion et arrive bien souvent aux hypothèse, la synthèse est donc la réécriture “à l'endroit”).

Vous noterez cependant qu'il est possible d'en faire un rapidement au brouillon puis de réécrire la synthèse seulement à l'endroit sur la copie. De cette façon, il n'apparaît que les étapes correctes dans le sens qu'il faut.

Exemple 3.17 :
Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (à revoir dans le chapitre sur les espaces vectoriels avec les sommes directes).

Le raisonnement par analyse-synthèse est un raisonnement très classique qu'on utilise très souvent sans forcément le formaliser. C'est ce que l'on fait lorsque l'on résout une équation, par exemple. On part de l'hypothèse que l'équation a une solution, et en raisonnant à partir de cette solution, on essaie de déterminer ses propriétés. Il devrait alors s'en suivre une vérification, mais que l'on omet souvent.

Exemple 3.18 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x-1 \leq \sqrt{x+2}$ et l'équation $x=\sqrt{2-x}$.

Exemple 3.19 :
Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $1+x+x^2+x^3+x^4=y^2$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\forall n \geq 4,\ (2n^2+n)^2 < 4(1+n+n^2+n^3+n^4) < (2n^2+n+1)^2.$$
2. En déduire que si l'équation a une solution entière $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, alors $x \in \{0,1,2,3\}$.
3. Résoudre l'équation.

!!! ATTENTION !!!

⚠ En dernier lieu, toujours bien se méfier du français. Les phrases en français sont pleines de pièges, de figures de rhétoriques qui portent un sens caché. Or tout doit être explicite, en mathématiques. Les sous-entendu ne sont pas les bienvenus. Méfiez vous spécifiquement des implications tacites. Ce sont les pires.

Common proof techniques

Proof by intimidation Trivial!

Proof by cumbersome notation The theorem follows immediately from the fact that $\left|\bigoplus_{k\in S}\left(\mathfrak{K}^{\mathbb{F}^{\alpha}(i)}\right)_{i\in\mathcal{U}_k}\right| \preccurlyeq \aleph_1$ when $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^{\alpha}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$.

Proof by inaccessible literature The theorem is an easy corollary of a result proven in a hand-written note handed out during a lecture by the Yugoslavian Mathematical Society in 1973.

Proof by ghost reference The proof my be found on page 478 in a textbook which turns out to have 396 pages.

Circular argument Proposition 5.18 in [BL] is an easy corollary of Theorem 7.18 in [C], which is again based on Corollary 2.14 in [K]. This, on the other hand, is derived with reference to Proposition 5.18 in [BL].

Proof by authority My good colleague Andrew said he thought he might have come up with a proof of this a few years ago...

Internet reference For those interested, the result is shown on the web page of this book. Which unfortunately doesn't exist any more.

Proof by avoidance *Chapter 3:* The proof of this is delayed until Chapter 7 when we have developed the theory even further. *Chapter 7:* To make things easy, we only prove it for the case $z = 0$, but the general case in handled in Appendix C. *Appendix C:* The formal proof is beyond the scope of this book, but of course, our intuition knows this to be true.


Les devises Shadok
AVEC UN ESCALIER PRÉVU POUR LA MONTÉE ON RÉUSSIT SOUVENT À MONTER PLUS BAS QU'ON NE SERAIT DESCENDU AVEC UN ESCALIER PRÉVU POUR LA DESCENTE.


IL FAUT POMPER POUR VIVRE
DONC IL FAUT VIVRE POUR POMPER.


Les devises Shadok
SI ÇA FAIT MAL C'EST QUE ÇA FAIT DU BIEN !!


Les devises Shadok
S'IL N'Y A PAS DE SOLUTION C'EST QU'IL N'Y A PAS DE PROBLÈME.


Les devises Shadok
http://nchech.online.fr/
IL VAUT MIEUX POMPER MÊME S'IL NE SE PASSE RIEN QUE RISQUER QU'IL SE PASSE QUELQUE CHOSE DE PIRE EN NE POMPANT PAS.


Les devises Shadok
JE DIS DES CHOSES TELLEMENT INTELLIGENTES QUE, LE PLUS SOUVENT, JE COMPRENDS PAS CE QUE JE DIS.
DIPLÔME SHADOK

4 Rappels et Généralités Mathématiques

4.1 Règles de calculs

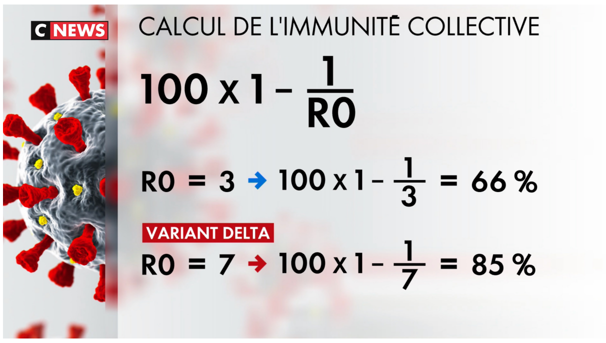
4.1.1 Priorités

On rappelle que dans les calculs, les parenthèses ont toujours la priorités. Dans l'ordre de priorités, il faut s'occuper de :

1) Les parenthèses ;
2) Les multiplications (et divisions) ;
3) Les sommes (et soustractions).

!!! ATTENTION !!!

⚠ NE PAS OUBLIER LES PARENTHÈSES EN FACTORISANT, DÉVELOPPANT ETC ! ! !



Exemple 4.1 :
Simplifier l'expression suivante :

$$2(xy + (x - y)(3x - 1)) + xy + (x - 1)(2 + 3y)$$

Remarque :
On rappelle que la seule opérations que l'on peut sous-entendre à l'écriture (donc que l'on peut omettre d'écrire) est la multiplication, seulement devant une lettre. Toutes les autres opérations doivent être explicitement notées.

!!! ATTENTION !!!

⚠ On rappelle que toutes les opérations ont un symbole et qu'il doit obligatoirement apparaître, sans quoi, on ne peut pas lire.

Il existe cependant UNE seule exception : la seule opération que l'on peut omettre d'écrire est la multiplication et seulement devant une lettre ou une parenthèse. Toutes les autres opérations doivent impérativement être explicitement écrites avec le symbole adéquat. Si une opération est sous-entendues, c'est automatiquement le symbole $\times$. Il n'y a pas de dérogations.

4.1.2 Fractions

Proposition 4.1 (Règles de calculs avec les fractions) :
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $b, d \neq 0$.

(i) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

(ii) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(iii) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{ac}{bd}$

(iv) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

On rappel également que la dernière relation n'est pas la plus optimum. On peut simplifier grandement les calculs en choisissant un dénominateur commun le plus petit possible (dans le cas où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, il suffit de choisir le ppcm de b et d qui est le plus petit commun multiple).

Exemple 4.2 :
Simplifier :

1. $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$
2. $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$
3. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{4}{\frac{x^2+y^2}{y-x}+x-y}$

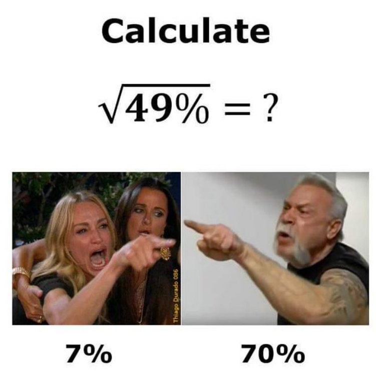
Remarque (Pourcentages) :
Une fraction correspondant à un proportion, on peut toujours exprimer une proportion donnée différemment en changeant le nombre de part global formée. C'est l'idée des pourcentages. On divise la totalité en 100 part égale et on exprime alors la proportion par rapport à ces 100 part.

- Concrètement, pour exprimer une fraction a/b en pourcentage, il faut se ramener à dénominateur égale à 100. En posant $x = 100a/b$, on a alors $\frac{a}{b} = \frac{x}{100} = x\%$.

- Une proportion n'étant qu'une part de quelque chose, un fraction n'a jamais de sens concret directement. Il faut prendre une proportion de quelque chose. En particulier, dire que b est égale à $x\%$ de a, veut dire que $b = \frac{x}{100}a$. b est donc une part de a.
- Dans le cadre des pourcentages, il arrive souvent que l'on augmente ou diminue une quantité d'un certain pourcentage. Dire que a augmente (resp. diminue) de $x\%$, veut dire qu'on ajoute (resp. retranche) à a une part de lui même, *i.e.* on a $a + \frac{x}{100}a = (1 + x/100)a$ (resp. $a - \frac{x}{100}a = (1 - x/100)a$).

Exemple 4.3 :
Pour quelles valeurs de x et y, $x\%$ de y correspond-il à $y\%$ de x ?

Exemple 4.4 :
Qu'en pensez-vous ?



Remarque (Rappel sur les fractions et les nombres) :
On rappelle qu'un nombre est une entité à part entière mathématique mais qui n'a pas de sens réel direct. Un nombre n'a pas de sens concret. On peut lui en donner, mais un nombre n'est pas pourvu, intrinsèquement, d'une significative concrète. La quantité 3 peut représenter à peu près n'importe quoi.

Par conséquent, on peut mathématiquement additionner n'importe quelle quantité (les opérations sont bien définies), mais elle n'a pour autant de sens réel, de sens concret. C'est ce que l'on veut dire par : "on ne peut additionner des choux et des carottes". Si l'on dispose de 3 choux et 2 carottes, l'opération $3+2=5$ est parfaitement définie et juste, mais elle ne correspond à rien dans la situation réelle donnée. Il ne faut pas confondre "nombre" et "nombre de".

De la même manière, on rappelle que les fractions peuvent représenter des nombres à part entière ou bien des proportions. Par exemple, $\frac{2}{3}$ peut être utilisé pour le nombre $\frac{2}{3}$ (ce que nous ferons en mathématiques), ou bien pour représenter la part de quelque chose dans une autre (par exemple, la proportion de garçon dans les études scientifiques).

Dans le second cas, on a seulement une proportion et pas une quantité (ne pas confondre les deux). Pour avoir la quantité représenté par une proportion, il faut multiplier la proportion par la quantité à laquelle elle se rapporte. Donc si une filière scientifique compte N élèves, alors il y a $\frac{2}{3}N$ garçons dans cette filière.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La remarque précédente peut paraître anodine, mais elle ne l'est pas du tout. Il ne faut pas oublier qu'en physique et en SI, qui sont des disciplines provenant du réel, toutes les quantités manipulées représente quelque chose de concret. Toutes les quantités ont des grandeurs. On ne manipule que (ou presque) des "nombres de" en physique et en SI. Il n'y a qu'en maths où l'on s'affranchit de cette contrainte pour étudier le nombre en tant qu'objet.

Par conséquent, toutes les opérations ne sont pas autorisées en physique et en SI !

4.1.3 Puissances, racines

Définition 4.1 (Racine carré) :
Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle la racine carré de a ***la*** solution ***positive*** de l'équation $x^2 = a$.

Remarque :
On rappelle que l'équation $x^2 = a$ peut avoir :

- 2 solutions si $a > 0$ (qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$)
- une unique solution si $a = 0$
- aucune solution dans $\mathbb{R}$ si $a < 0$ (mais deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$)

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne PAS oublier les deux solutions de l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$. En particulier de l'équation $x^2 = 1$! ! !

Exemple 4.5 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = x$.

Proposition 4.2 (Règle de calculs des puissances) :
Soit $a, b, c > 0$ et $x, y, z \in \mathbb{R}$ alors :

(i) $a^{-1} = \frac{1}{a}$

(ii) $a^x b^x = (ab)^x$

(iii) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

(iv) $a^x a^y = a^{x+y}$

(v) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(vi) $(a^x)^y = a^{xy}$

Remarque :
On rappelle également que

$$a \times b^{-1} = \frac{a}{b}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{ad}{bc}$$

!!! ATTENTION !!!

Attention, la définition de la notation a^b change en fonction de la nature de a et de b. Voir le cours de Maths sur les fonctions usuelles pour plus de détails. On rappelle tout de même que

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}$$

Remarque :
Par convention, on prend $0^0 = 1$. Cette convention sert à ne pas avoir de problèmes dans les formules et les calculs. On peut la justifier également par un prolongement par continuité que nous verrons dans le cours de maths. Toutefois, ce nombre n'étant pas clairement pas défini, on peut lui donner une autre valeur (en fait, selon la façon dont on le défini, il peut prendre n'importe quelle valeur réelle > 0).

On en profite également pour rappeler :

Proposition 4.3 (Factorisations classique) :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$, alors :

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Remarque :
Ces factorisations ne sont que des cas particulier du binôme de Newton que nous verrons très (très) bientôt en mathématiques.

Proposition 4.4 (Expression des racines avec des puissances) :
Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a la relation $\sqrt{a} = a^{1/2}$.
Par extension on a $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ On rappelle que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2} = |a|, \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a}^2 = a.$$

Remarque :
Ne JAMAIS écrire une racine d'un nombre qui ne soit pas positif. En dépit de tout ce que l'on peut voir sur internet ou ailleurs, ne JAMAIS mettre autre chose que des nombres positif sous une racine sous peine de voir le prof de maths entrer en éruption. Seul les nombres ***réels positifs*** peuvent avoir des racines carrées. Et uniquement ceux là.

Exemple 4.6 :

Chercher l'erreur :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\pi+3}{2} \\ 2x &= \pi + 3 \\ 2x(\pi-3) &= (\pi+3)(\pi-3) \\ 2\pi x - 6x &= \pi^2 - 9 \\ 9 - 6x &= \pi^2 - 2\pi x \\ 9 - 6x + x^2 &= \pi^2 - 2\pi x + x^2 \\ (3-x)^2 &= (\pi - x)^2 \\ 3 - x &= \pi - x \\ \pi &= 3 \end{aligned}}$$

Proposition 4.5 (Fonction polynomiale de degré 2) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors f ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(a)$.
- Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(a)$ et $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors f s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe ; les racines sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\forall x \in]x_1, x_2[$, $\operatorname{sign}(f(x)) = -\operatorname{sign}(a)$ et $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(a)$ sinon ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 4.7 :
Déterminer le nombre de solutions de $x^2 + px + 2 - p = 0$ en fonction du paramètre $p \in \mathbb{R}$.

Définition-Propriété 4.2 (Forme canonique d'un polynôme du second degré) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On appelle forme canonique de f son écriture sous la forme $f(x) = \alpha(x-\beta)^2 - \gamma$.
En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

L'écriture sous forme canonique de f permet de lire les coordonnées du sommet de la parabole de f. Son sommet est le point $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Exemple 4.8 :
On pose $g(t) = 3t^2 - 2t - 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) \geq -7/3$.

4.1.4 Logarithmes, Exponentielles

Les définitions propres et correctes des fonctions exponentielles et logarithmes seront données dans le cours de maths (chapitre Fonctions Usuelles). On se contentera ici de rappels des propriétés.

Proposition 4.6 (Propriétés algébriques) :
On a $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et

(i) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a e^b$

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{ab} = (e^a)^b = (e^b)^a$

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

(vii) $e^0 = 1$

(iv) $\forall a, b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(v) $\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ b\ln(a) = \ln(a^b)$

(vi) $\forall a, b > 0,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(viii) $\ln(1) = 0$

et aussi :

$$\forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x.$$

Proposition 4.7 (Exponentielles de bases a) :
On a

$$\forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Définition 4.3 (Logarithme de base a) :
Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. On définit le logarithme de base $a > 0$, notée $\log_a$ par :

$$\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

En particulier, le logarithme décimal (notée souvent $\log$ simplement) est définit par $\forall x > 0$, $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarque :
En conséquence, les propriétés algébriques (calculatoire) des logarithmes de base a (et donc en particulier des logarithmes de base 10) sont les mêmes que les propriétés du logarithme népérien (ou logarithme naturel).

Pour plus de détails, évidemment, voir le cours de maths.

Exemple 4.9 :
Résoudre

$$a^{(b^x)} = b^{(a^x)}$$

où $a, b > 1$ et $a \neq b$.

4.2 Équations

Une équation est une relation entre des quantités finies connues (souvent représentées par des lettres du début de l'alphabet) et des quantités inconnues (souvent représentées par des lettres de la fin de l'alphabet). Une équation est essentiellement la question "pour quelles valeurs de ces inconnues, la relation donnée est-elle vraie". Résoudre une équation est alors répondre à cette équation. Il faut trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles la relation est vraie.

Une égalité (indépendamment d'une équation) peut être vue comme une balance à plateau. C'est un équilibre entre le terme de gauche et celui de droite de l'égalité.

Par conséquent, en faisant des transformations sur l'un des côtés de l'égalité, il faudra impérativement opérer la même transformation sur l'autre membre pour conserver l'équilibre.

Pour résoudre une équation (à une seule inconnue), il faut essentiellement isoler (quand c'est possible) l'inconnue d'un côté de l'égalité pour l'exprimer en fonction des paramètres. Mais cela n'est pas toujours possible. On ne peut pas résoudre par cette méthode toutes les équations (les équations les plus intéressantes ne peuvent d'ailleurs pas être résolues par cette méthode).

Pour manipuler une équation, on retiendra que :

- On ne change pas une équation en ajoutant (ou retirant) une même quantité *des deux côtés* de l'égalité.

- On ne change pas une équation en multipliant (ou divisant) par un même réel **non nuls** *les deux côtés* de l'égalité.
- Prendre les images par une fonction (attention il y a quelques restrictions sur ce point, mais qui seront détaillés en maths)

L'idée générale est de "détricoter" les membres de l'équation au fur et à mesure et utilisant les opérations contraires (donc une soustraction lorsqu'il y a une addition ; une addition lorsqu'il y a une addition ; une division lorsqu'il y a une multiplication ; une multiplication lorsqu'il y a une division).

⚠ **!!! ATTENTION !!!**

On manipule une équation conformément aux règles de priorités dans un calcul !

Exemple 4.10 :
Isoler la hauteur dans l'expression de la vitesse d'un satellite en orbite autour de la Terre :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}}$$

Remarque :
Pour résoudre une équation :

- Résout directement si l'équation est suffisamment simple
- Se ramène à l'étude d'une équation de la forme $f(x) = 0$ si elle est plus compliqué en factorisant au maximum, puis on se ramène en cas précédent (la factorisation "simplifie" l'expression)

Exemple 4.11 :
Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $(x-4)(x+7) = (2x+1)(x+7)$
2. $\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1-3x}{x^2-1}$
3. $\frac{3x+1}{6x-3} = -\frac{7}{6}$
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$ avec $a \neq b$.

Exemple 4.12 :
Résoudre

1. $x-1=\sqrt{x+2}$ pour $x \geq -2$
2. $(4/9)^x(8/27)^{1-x}=2/3$
3. $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$ pour $x \geq 0$
4. $(1+b^2)(e^x+e^{-x})+(1-b^2)(e^x-e^{-x})=4b$ avec $b>0$.
5. $\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8(3)+\log_8(x+1)}=\log_9(27)$

Définition 4.4 (Système d'équations) :
On appelle système d'équation la conjonction des plusieurs équations. Résoudre le système est alors trouver l'ensemble des valeurs de toutes les inconnues qui peuvent apparaître pour lesquelles *toutes* les équations du systèmes sont vérifiées en même temps.

Pour résoudre un système, il ne suffit donc pas de résoudre chacune des équations séparément. Il faut les résoudre *simultanément*.

Remarque :
Il y a plusieurs types de systèmes d'équations. Un chapitre de mathématiques complet sera dédié à l'étude et la résolution des systèmes linéaires.

Définition 4.5 (Systèmes d'équations linéaires) :
On appelle système d'équations linéaires un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1+a_{p,2}x_2+\cdots+a_{p,n}x_n=b_p \end{cases}$$

Exemple 4.13 :
Le système $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$ est un système d'équations linéaires (a 2 équations et 3 inconnues).
En revanche, le système $\begin{cases} 2x+3y=2xy \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$ est uns système d'équations non linéaires.

Exemple 4.14 :
Parmi les systèmes suivants, déterminer lesquels sont linéaires, leurs nombres d'équations et d'inconnues.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=z \\ y+z=x \\ z+x=y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+2y=xy \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ x+2y=3x \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{1}{5} \\ 2x+3=y \\ 5x-3y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+y \\ x+z=1 \\ x+y+z=\beta \end{cases} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Proposition 4.8 (Résolution d'un système d'équation) :
Il existe essentiellement deux façons de résoudre un système d'équation : par combinaison linéaire ou par substitution.

- **Résolution par substitution :** Le principe consiste à choisir une équation dans le système, choisir une inconnue dans cette équation, l'isoler puis la remplacer par cette expression dans toutes les autres équations du système et recommencer. À chaque étape, on se ramène à un nouveau système qui contient une équation de moins et une inconnue de moins.

  Le but est d'aboutir à une équation à une inconnue, la résoudre et remonter pour déterminer chacune des inconnues.
- **Résolution par combinaisons linéaires :** Cette méthode n'est utile **QUE** pour les systèmes linéaires. Le principe consiste à éliminer des inconnues dans les équations en opérant des combinaisons linéaire sur les équations du système.

Remarque :
En mathématique, dès lors que l'on aura un système linéaire, il faudra ***impérativement*** faire des combinaisons linéaires. C'est précisément l'objet du cours sur la résolution de système. Toutes autres méthode de résolution ne sera pas prise en compte.

Exemple 4.15 :
Résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=-1 \\ xyz=0 \end{cases}$$

et le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Exemple 4.16 :

1. Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues Q_C et Q_F :

$$\begin{cases} W+Q_C+Q_F=0 \\ \frac{Q_C}{T_C}+\frac{Q_F}{T_F}=0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système suivant d'inconnue P_2 et V_2 :

$$\begin{cases} \frac{P_2V_2}{T_2}=\frac{P_1V_1}{T_1} \\ P_1V_1^\gamma=P_2V_2^\gamma \end{cases}$$

4.3 Inéquations

Définition 4.6 (Valeur absolue) :
On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

À l'instar d'une équation, une inéquation est également une relation qui doit être vérifiée pour les valeurs solutions de l'inconnue. Mais contrairement à l'équation, une inéquation est un déséquilibre qui doit être conservé. Il est (un peu paradoxalement) plus difficile de conserver un déséquilibre qu'un équilibre. Il faudra faire plus attention et prendre beaucoup plus de précautions en manipulant des inégalités.

Pour manipuler une inéquation, on retiendra :

- On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant (ou retranchant) une même quantité **aux deux membres** de l'inéquation.
- On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant (ou divisant) **les deux membres** de l'inéquation par un même réel non nul. **ATTENTION !** Dans le cas où l'on multiplie par une nombre négatif, il faut changer le sens de l'inéquation.
- On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en prenant l'image des deux membres par une fonction **monotone**. Le sens de l'inégalité change si la fonction appliquée est décroissante (c'est ce qui explique le changement de sens par la multiplication par un nombre négatif).

!!! ATTENTION !!!

Il faut changer le sens de l'inéquation en appliquant une fonction décroissante ! En particulier, il ne faut pas oublier de changer le sens de l'inégalité en multipliant par un nombre négatif. Il faudra bien prendre garde au signe de ce par quoi l'on multiplie (en particulier si le signe à l'air positif).

Remarque :
Pour résoudre une inéquation, on se ramène toujours à étudier le signe d'une expression. Les seules inéquations que l'ont sait réellement résoudre, correspondent à des études de signes.

- Si on a une inéquation polynomiale d'ordre 1, on la résout directement.
- Si on a une inéquation plus compliqué, on se ramène toujours à une inéquation de la forme $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$ où $f(x)$ est sous forme factorisé. Puis on fait une étude de signe en se ramenant au cas précédent pour chacun des facteurs de $f(x)$.

Exemple 4.17 :
Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$:

1. $3 - 2x < 5$
2. $|3 - 4x| \geq 17$
3. $\frac{3x+1}{6x-3} \leq -\frac{7}{6}$
4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \leq 2$

!!! ATTENTION !!!

⚠

Ne pas confondre les inégalités strictes et les inégalités larges ! On ne peut pas passer de l'une à l'autre sans conséquences !

Exemple 4.18 :
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $3 - 2x > 5$
2. $|3 - 4x| \geq 17$
3. $\frac{4x-8}{3-5x} \leq 2$
4. $\frac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$

5 Rappels d'analyse

5.1 Premières propriétés

Définition 5.1 (Opérations de bases) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$. Alors on peu munir $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de trois opérations de bases (deux LCI et une LCE) [a] :

- On définit l'addition (LCI) par : $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on définit $f + g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par
$$\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
- On définit la multiplication par les réels (LCE) par : $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
- On définit le produit de fonctions (LCI) par : $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit $fg \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x) \times g(x).$$

a. Voir chapitres sur les groupes et l'algèbre linéaires pour plus de détails.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Bien prendre au vocabulaire. Les fonctions ne sont pas des salades. La fonction $x \mapsto \sqrt{x} + \ln(x) + x^2 - 1$ n'est pas une composée. C'est une somme de fonctions. Confondre le vocabulaire entraînera immanquablement deux situations fâcheuses : vous ne serez pas compris ; vous confondrez les opérations menant automatiquement à une confusion dans votre tête.

Penser, c'est parler ; parler, c'est penser.

Christophe Hache
didacticien des mathématiques,
spécialiste du langage

Proposition 5.1 (Propriété algébrique des opérations entre fonctions) :
L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ muni de ses trois opérations de bases est une $\mathbb{R}$-algèbre. Précisément, on a :

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f + g = g + f.$ [*Commutativité*]
2. Si $\eta : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$, alors $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f + \eta = f = \eta + f$ [*Élément neutre*]
3. $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \exists g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $f + g = \eta = g + f$ [*Symétrie*]
4. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ (f + g) + h = f + (g + h)$ [*Associativité*]
5. $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$ [*Distri. de la LCI de $\mathbb{R}$ sur la LCE*]
6. $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ [*Distributivité de la LCI sur la LCE*]
7. $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$ [*Associativité*]
8. $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ 1 \times f = f$ [*Élément neutre*]
9. $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ fg = gf$ [*Commutativité*]
10. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ (fg)h = f(gh)$ [*Associativité*]
11. Si $\gamma : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$, alors $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \gamma f = f\gamma = f$ [*Élément neutre*]
12. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f \times (g + h) = fg + fh$ [*Distri. de la 2nd LCI sur la première LCI*]

Démonstration :
Ce n'est que de la vérification, que de l'écriture. C'est fastidieux et pas particulièrement intéressant. Mais il faut le faire au moins une fois. □

Remarque :
Toutes ces propriétés seront revues plus en détails dans les chapitres ultérieurs.

Définition 5.2 (Composition) :
Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$. Si $f(A) \subset B$, alors on peut définir la composée de f et g par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Donc, par définition, $\forall x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque :
On prendra garde au sens dans lequel on écrit les choses. C'est f qui s'applique en premier, mais celle qu'on écrit en second. Donc on écrit les choses un peu dans le sens inverse où on les pense. Ça peut mener à des problèmes si on y prend pas grade (c'est assez courant).

La notation est toutefois choisie pour être cohérente avec la définition de l'expression, avec ce qu'il se passe du point de vue des expressions, des applications des deux fonctions.

Remarque :
Pour justifier qu'une composée est bien définie et a un sens, il faut donc seulement (mais c'est vitale) justifier de l'inclusion $f(A) \subset B$. Dans le cas d'une expression un peu compliquée, on peut présenter les choses sous forme de "cascade" pour montrer que les choses "coulent bien".

Exemple 5.1 :
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{4}{2+e^x} + 1\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]1,3] \\ y & \mapsto & \frac{4}{2+y} + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \ln(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{4}{2+e^x} + 1\right) \end{array}$$

Définition 5.3 (Ensemble de définition) :
On rappelle qu'une application est définit par trois choses : son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et une expression.

Dans le cas où une fonction est clairement définie (au sens de la définition d'une application, donc où les trois éléments caractéristiques d'une fonction sont clairement identifiés), le domaine de définition d'une fonction à variable réelle est donc le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui lui sert d'espace de départ.

Dans le cas où l'on considère une expression seulement, le domaine de définition associée correspondra au plus grands (au sens de l'inclusion) sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel l'expression donnée à un sens.

Exemple 5.2 :
Si on considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$.

Si on considère la fonction g définie par $g : x \mapsto \frac{x^2+1}{\ln(x)+1}$, cette fonction est alors définie sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$. Le domaine de définition de l'expression de g (et donc par extension, le domaine de définition de g) est $]1/e, +\infty[$.

Exemple 5.3 :
On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-1)$ et $g : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Que dire de leur ensemble de définition ?

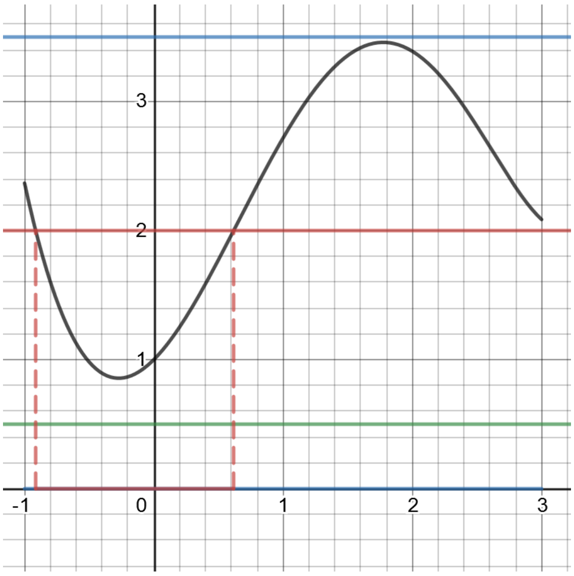
Définition 5.4 (Graphe d'une fonction à variable réelle (Rappel)) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Le graphe de f est alors

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)),\ x \in I\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Représenter f graphiquement correspond alors à représenter le graphe de f dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par convention, l'axe des abscisses correspond à l'axe de la variable de f et l'axe des ordonnées correspond à l'axe des images par f. Mais on peut tout à fait représenter des fonctions de la variable y. Ce qui donne des graphes "penchés".

Proposition 5.2 (Résolution graphiques d'équations et d'inéquations) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = \lambda$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe de f avec la droite d'équation $y = \lambda$.
- Résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) \leq \lambda$ (resp. $f(x) \geq \lambda$) revient à déterminer l'ensemble des abscisses dont les points de la courbe sont en dessous (resp. au dessus) de la droite d'équation $y = \lambda$.



5.2 Symétries

Définition 5.5 (Intervalle centré en 0) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est *centré en* 0 si

$$\forall x \in I, \ -x \in I.$$

Remarque :
On notera que si $I = \emptyset$ ou si $I = \{0\}$, I est centré en 0. Mais ça n'a pas beaucoup d'intérêt.

Les intervalles centrés en 0 ne peuvent pas être de n'importe quelle forme. On a alors

$$I = \mathbb{R}, \text{ ou } \exists a > 0, \ I = [-a, a], \text{ ou } I =]-a, a[.$$

En effet, compte tenu de la définition, si une borne est dans l'intervalle, son opposé doit l'être aussi et donc c'est un segment.

Définition 5.6 (Parité, Imparité) :
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble symétrique par rapport à 0 (*i.e.* $x \in E \iff -x \in E$). Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$, alors f est dite paire.
- Si $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$, alors f est dite impaire.

Remarque :
Toute fonction n'est pas forcément paire ou impaire. La majorité des fonctions ne sont ni l'un, ni l'autre.

Proposition 5.3 (Caractérisation géométrique de la parité) :
Soit $E \subset \mathbb{R}$ centré symétrique par rapport à 0. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

(i) f est paire si, et seulement si, $\mathrm{Gr}(f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie axiale)

(ii) f est impaires si, et seulement si, $\mathrm{Gr}(f)$ est symétrique par rapport à l'origine (symétrie centrale)

Démonstration :
On ne va traiter que le cas paire. Le cas impaire se traite de la même manière.

Supposons f paire. On note M_x le point de coordonnées $(x, f(x))$. Alors M_x et M_{-x} ont la même ordonnée et des abscisses opposées. Autrement dit, $(M_xM_{-x}) \perp (Oy)$ et $d(M_x, (Oy)) = d(M_{-x}, (Oy))$. Donc $\mathrm{Gr}(f)$ est symétrique par rapport à l'axe des (Oy).

Réciproquement, si $\mathrm{Gr}(f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on peut déjà en déduire que le domaine de définition de f est automatiquement centré par rapport à 0). Alors M_x et M_{-x} ont la même ordonnée car ils sont symétriques l'un de l'autre et donc $f(x) = f(-x)$. $\square$

Définition 5.7 (Périodicité) :
Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

On dit que f est T-*périodique* si $\forall x \in E$, $x + T \in E$ et $f(x + T) = f(x)$. On dit que f est *périodique* si f est t-périodique pour un certain $t > 0$.

Proposition 5.4 (Caractérisation géométrique de la périodicité) :
Soit $E \subset \mathbb{R}$, $T > 0$ et $f : E \to \mathbb{R}$.
f est T-périodique si, et seulement si, $\mathrm{Gr}(f)$ est invariant par translation d'amplitude T (*i.e.* de vecteur $T\vec{\imath}$)

Proposition 5.5 (Opérations et parité / périodicité) :
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit deux fonctions f et g définies sur des ensemble E_f et E_g. Sous réserves que les opérations suivantes sont bien définies, on a :

(i) Si f et g sont paires, alors $\lambda f + \mu g$ est paire.

(ii) Si f et g sont impaires, alors $\lambda f + \mu g$ et est impaire.

(iii) Si f et g ont même parité, alors $f \circ g$ est paire.

(iv) Si f et g ont des parité contraire, alors $f \circ g$ est paire.

(v) Si f et g sont périodique, alors $\lambda f + \mu g$ est périodique.

(vi) Si g est périodique, alors $f \circ g$ est périodique.

Démonstration :
Il suffit de l'écrire. □

Exemple 5.4 ([✓]) :
Toute fonction est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exemple 5.5 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

5.3 Asymptotes

Définition 5.8 (Asymptotes) :
Soit I un intervalle et $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ (a éventuellement une borne de I ou infini). On dit que f et g sont asymptotes l'une de l'autre en a si les graphes de f et g se rapprochent l'une de l'autre en a, *i.e.* si

$$f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Proposition 5.6 (Asymptotes horizontales / verticales) :
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors la droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote verticale au graphe de f.

(ii) Si $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale au graphe de f.

Remarque :
Si f et g sont asymptotes l'une de l'autre, alors le signe de $f - g$ permet d'avoir la position relative de l'une par rapport.

Proposition 5.7 (Comportement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$) :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

(i) Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, alors on dit que $\mathrm{Gr}(f)$ a une branche parabolique horizontale.

(ii) Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$, alors on dit que $\mathrm{Gr}(f)$ a une branche parabolique verticale.

(iii) Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a \in \mathbb{R}$

- Si $f(x) - ax \xrightarrow[x \to +\infty]{} b \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$.
- Si $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie en $+\infty$, alors on dit que $\mathrm{Gr}(f)$ a une branche parabolique d'axe $y = ax$.

Remarque :
On a formulé le théorème précédent en $+\infty$, mais, bien entendu, il est tout aussi valable en $-\infty$. Il faudrait le réécrire en $-\infty$.

Exemple 5.6 :
Étudier les asymptotes de $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

5.4 Variations

Définition 5.9 (Fonction croissante, Fonction strictement croissante) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

f est *croissante sur* I si $\forall x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.	f est *décroissante sur* I si $\forall x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
f est *strictement croissante sur* I si $\forall x, y \in I,\ x < y \implies f(x) < f(y)$.	f est *strictement décroissante sur* I si $\forall x, y \in I,\ x < y \implies f(x) > f(y)$

On dit que f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 5.8 :
La somme de deux fonctions (strictement) croissantes (resp. décroissantes) est (strictement) croissantes (resp. décroissante).

!!! ATTENTION !!!

On ne peut rien dire en général pour la différence de deux fonctions de même monotonie, ni pour le produit : si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto 2x$, alors $f - g$ est décroissante et donc $g - f$ est croissante.

De même, si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x - 1$, alors fg est décroissante sur $]-\infty, 1/2]$ et croissante sur $[1/2, +\infty[$.

Exemple 5.7 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Exemple 5.8 :
Quelles sont les involutions croissantes de $\mathbb{R}$? Autrement dit, déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

5.5 Majorant, Minorant

Définition 5.10 (Majorant, Minorant sur un intervalle, Fonction bornée) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit un *majorant (resp. minorant) de f sur I*, un réel M (resp. m) tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$ (resp. $\forall x \in I,\ f(x) \geq m$).

Si f admet un minorant ET un majorant, on dit alors que f est bornée sur I.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'intervalle sur lequel on cherche un majorant ou minorant est primordial. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ est majorée et minorée sur n'importe quel intervalle bornée de $\mathbb{R}$, mais n'a pas de majorant sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout intervalle qui n'est pas bornée). Mais f est minorée sur $\mathbb{R}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Un minorant ou majorant ne doit pas dépende de x ! Ça n'aurait aucun intérêt, sinon. Un GPS qui vous donne votre position par rapport à l'endroit où vous êtes, ce n'est pas très utile.

Exemple 5.9 :
Montrer que $f : x \mapsto x - |x^2 - 1|$ est majoré et donné un majorant.

5.6 Fonctions, Limites, Continuité et Dérivation

Définition 5.11 (Fonction) :
Une fonction est définie par trois choses : un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et la transformation d'un élément de l'ensemble de départ vers un élément de l'ensemble d'arrivée (en général donné par une expression). On peut lui donner un nom, ou non. Une application se note

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Changer un seul de ces trois éléments, change de fonction.

Exemple 5.10 :
Les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2, \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

sont trois fonctions différentes. Elles ont des propriétés différentes (que nous expliciterons un peu plus tard).

Définition 5.12 (Limites d'une fonction) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a une extrémité de I (donc $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$). Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $a \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon) \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \overset{\text{def}}{\iff} (\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \eta \implies \pm f(x) \geq M) \end{cases}$$

- Si $a = \pm\infty$, on définit :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to \pm\infty]{} \ell \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ \pm x > A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon) \\ f(x) \xrightarrow[x\to \pm\infty]{} \pm\infty \overset{\text{def}}{\iff} (\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ \pm x > A \implies \pm f(x) \geq M) \end{cases}$$

Remarque (Notations) :
La notation $\lim_{x\to a} f(x)$ est à proscrire. À tout jamais. De maintenant jusqu'à la fin de l'éternité. Et même au-delà.

La notation $\lim_{x\to a} f(x)$ ***EST*** la valeur de la limite. C'est une notion passive. Or toute fonction n'a pas forcément une limite en tout point. Donc il n'est pas dit que cette limite existe. Et, évidemment, on ne peut pas en parler tant qu'on a pas justifier de l'existence de cet objet. Donc l'écriture $\lim_{x\to a} f(x)$ présuppose qu'on a déjà justifier de l'existence de cette limite. Et en suite, cette notation ***EST*** la valeur de cette limite. On n'est donc pas en train de la calculer.

Par conséquent, dans les horreurs du genre $\cancel{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)}$, il y a trois arnaques en même temps : l'existence de la limite de f ; l'existence de la limite de g ; la preuve de l'égalité de ces deux valeurs. Ce genre d'aberrations ne peuvent PAS être utilisé dans la détermination d'une limite (qui suppose donc qu'on ne sait pas que la limite cherchée existe et ensuite de sa valeur, on ne peut donc pas "calculer" avec).

En revanche, la notation $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ ne pose jamais aucun problème. Les deux notations ne se prononce d'ailleurs pas pareil. Et cette version est une version active. On fait tendre x vers a et on regarde ce qu'il se passe pour f. Ce qui permet de justifier de deux choses en même temps : de l'existence de la limite et de sa valeur. C'est une étude. On fait tendre x vers a et on étudie ce qu'il se passe pour f.

On rappelle les opérations sur les fonctions admettant des limites :
Limite d'une somme

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim_a f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a fg$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite $\neq 0$ au dénominateur

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\lim_a f/g$	ℓ/ℓ'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite nulle au dénominateur

$\lim_a f$	$f(x)>0$	$f(x)>0$	$f(x)<0$	$f(x)<0$	0
$\lim_a g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_a f/g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

!!! ATTENTION !!!

Toutes autres formes qui n'est pas explicitement dans ces tableaux est une forme indéterminée. En particulier, les limites de la forme 1^∞ sont des FI. Ainsi que les 0^0. Il faudra voir en dessous pour les lever.

La dénomination a un sens ! Attention aux mots qu'on utilise ! Si on a une forme indéterminée, c'est que la limite ne peut être étudié sous CETTE forme. Il faut donc changer de forme pour lever l'indétermination et étudier le comportement asymptotique.

Vous vous en doutez, les seuls cas intéressant seront précisément les formes indéterminées.

Théorème 5.9 (Limite d'une composée) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles non vides et non réduits à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Alors

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ f(I) \subset J \\ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell \end{array}\right\} \implies g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

On rappelle les quelques limites de références :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\cos(x)-1}{x} \xrightarrow[\to 0]{} 0 \qquad \frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0 \qquad x\ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0 \qquad \frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad xe^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$$

Exemple 5.11 :
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{a}{x})^x$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.12 :
Trouver les limites suivantes en $+\infty$:

$$a : x \mapsto x^{-\sqrt{x}} \qquad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3} \qquad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}$$

$$d : x \mapsto \cos(x^2)e^{-x} \qquad e : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \qquad f : x \mapsto (2+\sin(x))x$$

Exemple 5.13 :
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{50x + x\ln(x)}{x\ln(x)+3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{x/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

Théorème 5.10 (Théorème des valeurs intermédiaires) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque :
Il existe de nombreuses autres versions du TVI. Notamment : "si $f(a) \leq f(b)$, alors $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$". Nous en verrons plusieurs cette année. Certains sont plus généraux que d'autres. Mais ils sont tous équivalents.

Exemple 5.14 :
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0, 7/10]$, $f(x + 3/10) \neq f(x)$ et $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

Proposition 5.11 (Théorème de la bijection) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone et continue sur I, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \alpha$ a une unique solution ou aucune solution.

Remarque :
En fait, ce théorème est la conjonction (la fusion) de deux théorèmes distincts : le TVI (pour assurer l'existence de solutions) et le lien entre injectivité et continuité (qui assure de l'unicité de la solution si elle existe). Nous verrons tout ces détails dans la suite. Notamment la définition exacte de l'injectivité.

Exemple 5.15 :
Spot $k \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x - k$. Déterminer les valeurs de k pour que f s'annule trois fois (distinctes) sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.13 (Nombre dérivée) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux de variations de f en a a une limite finie, et c'est la valeur de cette limite qui est appelé nombre dérivée de f en a, *i.e.* on dit que f est dérivable en a si

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

et alors on note $f'(a) = \ell$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Proposition 5.12 (Lien entre continuité et dérivabilité) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

⚠ **!!! ATTENTION !!!**

Ce n'est qu'une implication ! La réciproque est FAUSSE ! ! !

Contre-exemple :
La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier, elle est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0 !
Autre exemple plus intéressant : $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque :
On rappelle que pour une fonction donnée, il y a trois ensembles importants qui ne sont pas forcément les mêmes :

$$\begin{Bmatrix}\text{domaine de}\\ \text{dérivabilité}\end{Bmatrix} \subset \begin{Bmatrix}\text{domaine de}\\ \text{continuité}\end{Bmatrix} \subset \begin{Bmatrix}\text{domaine de}\\ \text{définition}\end{Bmatrix}$$

Proposition 5.13 (Dérivabilité est opérations) :
Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) Si f et g sont dérivables, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ (la dérivation est linéaire)

(ii) Si f et g sont dérivables, alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$

(iii) Si f et g sont dérivable et g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(iv) Si $f(I) \subset J$, et f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

On rappelle les dérivée usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	I	Paramètre	Commentaires
e^x	e^x	$\mathbb{R}$		
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$		
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$		
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$		⚠Continue sur $\mathbb{R}_+$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{Z}^*$ $\alpha\mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z}$	Voir fonctions puissances, chap Fonctions usuelles
$\cos(\varphi(t))$	$-\varphi'(t)\sin(\varphi(t))$	D_φ		Domaine de dérivabilité de φ
$\sin(\varphi(t))$	$\varphi'(t)\cos(\varphi(t))$	D_φ		Domaine de dérivabilité de φ
$e^{u(t)}$	$u'(t)e^{u(t)}$	D_u		Domaine de dérivabilité de u
$\ln(u(t))$	$\frac{u'(t)}{u(t)}$	D_u^+		Domaine où u est dérivable et >0
$u(t)^\alpha$	$\alpha u'(t)u(t)^{\alpha-1}$	$\widetilde{D_u}$	$\alpha \in \mathbb{R}^*$	Domaine de dérivabilité de u à modifier selon la valeur de α

Exemple 5.16 :
Déterminer le domaine D de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

$$f_1(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \qquad f_2(x) = 1-\cos(\sqrt{|x|})$$

$$f_3(x) = x\sin(x)\sin(1/x) \qquad f_4(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$$

$$f_5(x) = \frac{|x|}{1+|1-x^2|^n},\ n \in \mathbb{N} \qquad f_6(x) = (1+x)^{x^2}$$

$$f_7(x) = e^{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad f_8(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$$

Exemple 5.17 :
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$$

Proposition 5.14 (Caractérisation des fonctions constantes par les dérivées) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
f est constante sur I, si et seulement si, $f' = 0$.

Proposition 5.15 (Lien entre variations et dérivation) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

(i) f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative).

(ii) f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, si et seulement si, $f' > 0$ sut I (resp. $f' < 0$ sur I) sauf éventuellement sur des points isolés.

!!! ATTENTION !!!

C'est faux si on ne se place pas sur un intervalle.

Remarque :
On rappelle qu'on peut récapituler toutes ces informations dans un tableau de variations.

Exemple 5.18 :
Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{1 + x^2}$.

Définition 5.14 (Tangente à une courbe en un point) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors sa courbe admet une tangente au point d'abscisse a qui est la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque :
En particulier, si la dérivée est nulle, alors la tangente est horizontale (coefficient directeur nul).

Exemple 5.19 :
Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Exemple 5.20 :
Soit $f : t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$. Déterminer le nombres de solutions de l'équation $f(x) = f(y)$.

5.7 Trigonométrie

Proposition 5.16 (Propriétés (basiques) de $\cos$ et $\sin$) :
On a les propriétés suivantes :

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$

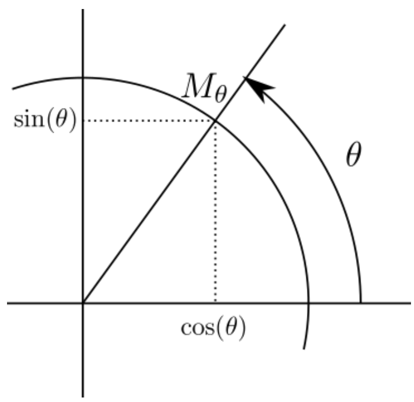
(ii) $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques

(iii) $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire

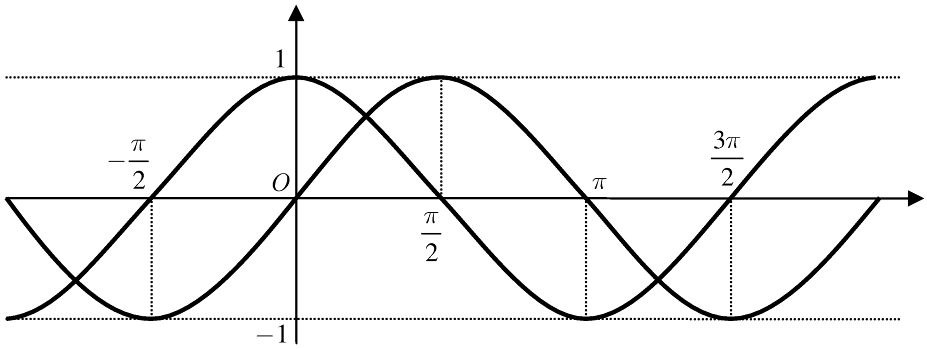
(iv) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + t) = -\cos t$ et $\sin(\pi + t) = -\sin t$ (on dit qu'elles sont π-antipériodiques)

(v) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi/2 - t) = \sin(t)$ et $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$

(vi) $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

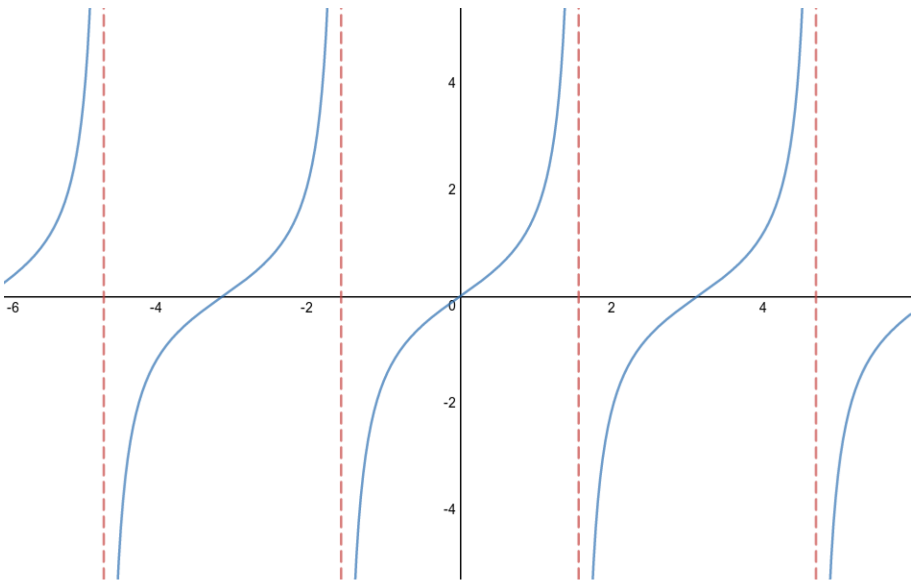


t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1



Proposition 5.17 (Propriété de la fonction $\tan$**) :**
La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$, impaire, π-périodique et indéfiniment dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \not\equiv \pi/2\ [\pi],\ \tan'(t) = \frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2$$



On a, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

En prenant $a = b$, on obtient

$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

On a également, sous réserve d'existence,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) \qquad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) \qquad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a)$$

et en posant $p = a+b$ et $q = a-b$, on trouve

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \qquad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\tfrac{p-q}{2})\cos(\tfrac{p+q}{2})$$

En particulier, avec $p = 0$, on a

$$1 + \cos(x) = 2\cos(x/2)^2 \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(x) = 2\sin(x/2)^2$$

Si $x \not\equiv \pi/2\ [\pi]$, alors

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2}$$

et si $x \not\equiv \pi/4\ [\pi/2]$, on a

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$$

Proposition 5.18 (Équations trigonométriques) :
Pour $x, \theta \in \mathbb{R}$, on a les solutions aux équations

$$\cos x = \cos\theta \iff \begin{cases} x \equiv \theta\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\theta\ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sin\theta \iff \begin{cases} x \equiv \theta\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

et bien sûr

$$\tan x = \tan\theta \iff x \equiv \theta\ [\pi]$$

Exemple 5.21 :
Résoudre l'équation $\cos(x) = \sin(3x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis $2\cos(x)^2 + \sin(x) = 1$.

Exemple 5.22 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $|\tan(x)| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $2\sin(x)^2 + \sin(x) - 1 = 0$.

Exemple 5.23 :
Résoudre l'inéquation $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

On peut aussi transformer $a\cos(x) + b\sin(x)$ sous la forme $A\cos(x - \phi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\phi \in \mathbb{R}$ bien choisi.

Exemple 5.24 :
Résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}/2$ puis $\sqrt{3}\cos(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.