Chapitre 1
Calculs Algébriques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

4 septembre 2024

$$\sqrt{-1} \quad 2^3 \quad \Sigma \quad \pi$$

and it was delicious!

Ce chapitre est très calculatoire. Il sert essentiellement à présenter des outils de calculs qui seront utiles pour toute la prépa. Ce sont les sommes et produits. On va présenter également les règles de calculs qui s'appliquent sur ces outils.

La formalisation liée à ces règles de calculs est très pénible et, en fait, assez peu utile et peu éclairante. La rigueur mathématique des énoncés sera donc un peu laxiste par rapport aux prochains cours.

J'insisterais donc sur le fait que le but principal de ce chapitre est la manipulation. Je ne saurais trop vous exhorter à refaire (encore et encore) tous les calculs qui se trouvent dans ce cours.

> Les candidats ne sont, en majorité, pas très solides au niveau calculatoire et perdent alors beaucoup de temps. Les défaillances calculatoires sont relevées par plusieurs examinateurs. [*CCINP 2022*]

> Le tout est plus que la somme de ses parties.
> *Aristote*

Table des matières

Dans la suite de ce chapitre, l'essentielle des définitions et propriétés seront formulés dans le cadre familier des complexes mais beaucoup de ces énoncés seront valables dans d'autres cadres que nous introduiront plus tard (et ce qui justifie également le laxisme de rigueur). Il faut garder en tête que ce ne sont que des règles de calculs. Ce qui suit n'est pas circonscrit seulement au cadre des nombres (réels ou complexes). Tout ceci pourra (devra et sera aussi) être utilisé sur des objets de différentes natures, tant que la notion de somme ou de produit est définie (on fera des sommes de vecteurs, de matrices, de fonctions ...).

1 La somme

1.1 Techniques de calculs

1.1.1 Le symbole $\sum$

Définition 1.1 (Somme) :
Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère une suite d'éléments $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$. On définit la notation :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

On pourra aussi noter cette somme sous la forme $\sum_{n \leq k \leq m} a_k$ ou encore $\sum_{k \in \{n, \ldots, m\}} a_k$.

Cette somme comporte $m - n + 1$ termes, et elle se lit "la somme pour k allant de n à m de a_k".

Remarque :
On a choisi ici de prendre les éléments sommés (les a_i) dans $\mathbb{C}$. Ce sont donc des nombres. Ce sera le cas en général, mais pas toujours. En fait, la notation de somme peut parfaitement être utilisé dès que l'opération somme est définie pour les objets que l'on considère. Par exemple, on ne peut pas faire la somme de deux ensemble. Il n'y a pas d'opération somme pour des ensembles. Mais on peut tout à fait faire la somme de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple. On pourra donc utiliser le signe somme (*i.e.* Σ) pour pouvoir faire des sommes de fonctions aussi.

!!! ATTENTION !!!

⚠ On prendra bien garde à ne pas oublier de noter, sous le signe $\sum$ l'indice de sommation. Il pourrait arriver (et il va arriver) que les termes de la somme (les a_k) dépendent d'un autre indice. Et auquel cas, l'indice de sommation est absolument nécessaire pour pouvoir comprendre la somme. C'est l'indice de sommation qui indique ce qui doit bouger (la variable de sommation, en d'autres termes). Par exemple, si je considère la suite $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que je veux faire une somme des termes de cette suite, vous sentez bien qu'il va être nécessaire de préciser que c'est n qui va bouger et pas p. Ce serait possible aussi, mais ça ne donnerait pas du tout le même résultat. L'indice de sommation permet de différencier par exemple

$$\sum_{n=1}^{3} p^n = p + p^2 + p^3 \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=1}^{3} p^n = 1 + 2^n + 3^n$$

On notera que le symbole $\sum$ est en fait la lettre grec majuscule Sigma (dont la version minuscule est σ) de l'alphabet grec (on va utiliser beaucoup de lettres grecques). C'est d'ailleurs comme ça qu'on l'appelle.

On notera également que l'on peut aussi écrire cette somme de façon encore plus générale : si I est un ensemble fini et si a_i a un sens quelque soit $i \in I$, on notera $\sum_{i \in I} a_i$ la somme de tous les éléments a_i avec l'indice parcourant l'ensemble I. En numérotant les éléments de I, on retombe sur la somme indiquée dans la définition. Cette notation très abstraite et peu utile dans les calculs proprement dit, mais peut s'avérer d'une très grande aide dans certains cas. Notamment pour simplifier un peu un excès de formalisme.

⚠ La variable k dans la somme $\sum_{k=n}^{m} a_k$ est ce que l'on appelle une variable muette. Son nom (la lettre qui désigne cette variable) n'a aucune importance et peut donc être changer à tout moment en fonction des besoins de clarté :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \sum_{\spadesuit=n}^{m} a_\spadesuit = \sum_{\heartsuit=n}^{m} a_\heartsuit$$

Il est donc tout à fait possible (et même chaleureusement conseillé) de modifier les noms des variables muettes en fonction de ce que l'on a l'habitude de manipuler pour rester dans un cadre confortable, ou de les modifier pour ne pas avoir de conflit de sens. On évitera donc décrire des choses de la forme

$$\xcancel{\sum_{k=1}^{5} \left(1 + \sum_{k=1}^{3} k^{3k+1} + k\right)}$$

qui n'a pas de sens alors que la somme

$$\sum_{k=1}^{5} \left(1 + \sum_{j=1}^{3} j^{3k+1} + k\right)$$

que j'avais en tête en a un (et qui vaut 2533). N'hésitez pas à changer les lettres de vos indices de sommations. Vous avez (au moins) 2 alphabet à votre disposition, ce qui vous fait, à la louche, $2 \times 26 \times 2 = 104$ lettres à votre disposition (en comptant les majuscules). Avec tous ça, je doute qu'il soit possible que vous arriviez à cours de lettres.

⚠ Attention ! Le résultat d'une somme ne peut pas dépendre de l'indice de sommation. L'indice de sommation est une variable muette, autrement dit, elle n'a que le rôle de déterminer ce qui varie dans les termes que l'on doit sommer. Cette information est donc strictement réservé au cadre de la somme. Elle n'a pas de sens en dehors du symbole $\sum$. Si on trouve encore un indice de sommation dans le résultat de la somme, c'est qu'il y a une erreur quelque part. Soit que la lettre de l'indice de sommation est utilisé ailleurs aussi, donc la lettre est utilsé deux fois pour deux choses (au moins) différentes, la lettre de sommation qui est une variable muette et également une autre variable. Ce qui est contre-indiqué. Il peut en résulter une incertitude ou un non sens dans la somme. Cette erreur peut venir aussi d'une erreur dans le calcul de la somme. En sommant les termes, on ne doit plus trouver d'indice de sommation. S'il reste là, c'est qu'il y a une erreur dans le calcul.

Exemple 1.1 :
On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (-1)^k$. Calculer $\sum_{k=0}^{5} a_k$ et $\sum_{k=0}^{6} a_k$.

Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, calculer $\sum_{k=2}^{n-1} 1$.

Dans la suite, on donnera les énoncés des propositions sous différentes formes pour essayer d'utiliser toutes les notations introduites dans cette partie et commencer à s'y habituer. Un bon exercice serait de réécrire tous les énoncés dans chacunes des écritures possibles.

Remarque (Convention de somme nulle) :
Par convention, dès que la borne inférieure de la somme est plus grande que la borne supérieure, la somme est égale à l'élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire 0 (*i.e.* si $n > m$ en reprenant les notations de l'énoncé précédent). En fait, dans ce genre de cas, la notation voudrait dire que l'on ne peut continuer la suite des termes a_k logiquement pour aller de n à m en incrémentant les indices (puisque $n > m$). Comme il n'y a pas de termes, on ne somme rien. Mais comme on a besoin que cette somme ait une valeur pour pouvoir l'utiliser au sein d'un long calcul par exemple, afin que cette valeur ne joue pas de rôle, on lui donne la valeur 0. Par exemple, si j'écris

$$P(2) = \sum_{k=5}^{2} 3^k$$

et que je veuille calculer $P(2)$, afin de pouvoir faire le calcul, poser 0 pour cette somme qui n'existe pas permet de résoudre le problème. Mais c'est une convention. On donne une valeur a quelque chose qui n'a pas de sens, qui n'existe pas, a strictement parlé, pour pouvoir l'utiliser tout de même dans des calculs sans devoir prendre de gants supplémentaires qui nous obligerait alors à découper notre démonstration pour faire des cas, des sous-cas et des sous-sous-cas inutiles [1].

1. De façon générale, les conventions mathématiques sont souvent faites dans cette optique. On introduit une définition, mais il arrive que le domaine d'existence dans la définition ne coïncide pas tout à fait avec les situations où l'objet apparaît. Pour ne pas se retrouver bloquer, on lui donne une valeur permettant de continuer le raisonnement.

1.1.2 Règles de Calculs

Proposition 1.1 (Linéarité de la somme) :
Soit I un ensemble fini, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall i \in I$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$$

La notion de linéarité sera vu plus en détails dans le chapitre sur les espaces vecoriels.

Démonstration :
Comme I est un ensemble fini, on peut numéroter ses éléments $i_1, \ldots, i_n$ avec n le nombre d'éléments de I. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}(a_i + b_i) &= \sum_{k=1}^{n}(a_{i_k} + b_{i_k}) \\
&= (a_{i_1} + b_{i_1}) + (a_{i_2} + b_{i_2}) + \cdots + (a_{i_n} + b_{i_n}) && \text{def de la notation} \\
&= (a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}) + (b_{i_1} + \cdots + b_{i_n}) && \text{commutativité et associativité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{i_k} && \text{def de la notation} \\
&= \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i
\end{aligned}$$

en utilisant, à la troisième ligne, l'associativité et la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ (cf chapitre sur les groupes).

Et on a de la même manière

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} \lambda a_i &= \sum_{k=1}^{n} \lambda a_{i_k} \\
&= \lambda a_{i_1} + \cdots + \lambda a_{i_n} \\
&= \lambda(a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}) && \begin{array}{c}\text{par distributivité de la multiplication} \\ \text{sur l'addition dans } \mathbb{R}\end{array} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} \\
&= \lambda \sum_{i\in I} a_i
\end{aligned}$$

$\square$

Le deuxième point de cette proposition est en fait seulement une mise en facteur. Mais attention ! On ne peut mettre en facteur qu'un élément de la somme qui ne dépend PAS de l'indice de sommation.

Dans la proposition, le terme λ que l'on met en facteur ne dépend pas de i qui est la variable muette de sommation.

On peut écrire la proposition précédente en une seule ligne aussi : si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

!!! ATTENTION !!!

⚠

Ça ne fonctionne pas avec les produits. En général, on a

$$\sum_{i\in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i\right)$$

Il suffit de regarder une somme de deux éléments pour s'en convaincre :

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \neq a_1b_1 + a_2b_2$$

Par contre, on a $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_i b_j$ mais nous reverrons ça un peu plus bas dans la partie sur les sommes doubles.

Exemple 1.2 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} 5$ et $\sum_{k=0}^{n}(13k - 26)$.

1.1.3 Sommes télescopiques

Définition 1.2 (Somme télescopique) :
On appelle *somme télescopique* toute somme qui peut s'écrire de la forme

$$\sum_{i=n}^{m}(a_{i+1} - a_i)$$

Proposition 1.2 (Calcul d'une somme télescopique) :
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in \{n, \dots, m+1\}$, $a_i \in \mathbb{C}$.
Alors
$$\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_n.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k) &= (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_m - a_{m-1}) + (a_{m+1} - a_m)\\ &= a_{m+1} - a_n\end{aligned}$$

□

Remarque :
On notera que bien qu'on somme de n à m, il faut que a_{m+1} existe pour que tout se passe bien. Le terme a_{m+1} apparaît dans la somme.

D'une façon générale, il faudra toujours prendre bien garde quand on écrit une somme que tous les termes qui sont utilisés existent bien.

On peut voir une somme télescopique comme "le terme d'indice le plus grand à l'indice le plus grand et le terme d'indice le plus petit à l'indice le plus petit" (sous entendu, le terme d'indice le plus grand à l'intérieur de la somme pris à la borne la plus grande, et le terme d'indice le plus petit dans la somme pros à la borne la plus petite).

Exemple 1.3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exemple 1.4 (Sommes de puissances (à connaître)) :
Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ la somme des n premières puissances m-ème des entiers. On sait depuis l'enfance que $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ (par la technique de Gauss, par exemple). On va calculer $S_2(n)$, la somme des n premiers carrés.

Première méthode (Efficace mais pas la plus élégante)

On pose $u_k = ak^3 + bk^2 + ck$ et on détermine a, b, c tels que $u_{k+1} - u_k = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puis la somme $S_2(n)$ est alors exprimer en fonction de $S_1(n)$.

Seconde méthode

D'abord par télescopage puis en développant chaque termes de la somme, calculer

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$$

et en déduire que $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ces deux méthodes peuvent être généralisée pour calculer tous les $S_m(n)$ pour tous les n et tous les m. La plus facile à généraliser est la seconde. Utilisez cette méthode pour calculer $S_3(n)$.

On retiendra :

Proposition 1.3 (Sommes d'entiers) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque :
On peut retenir également

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Mais cette somme est plus optionnelle.

1.1.4 Changement d'indice

Le changement d'indice est une sorte de chirurgie esthétique de la somme. Ça consiste essentiellement à raboter l'indice de sommation. Ça ne change donc rien en soit, mais ça permet de pouvoir faire de menues transformations qui peuvent faire apparaître des simplifications.

On peut procéder à un changement d'indice pour trois types de raisons (essentiellement) :

- Si l'on veut changer d'indice dans les termes à sommer. Pour "décaler" les indices des termes de la somme, par exemple :

  $$\sum_{k=n}^{m} a_{k+p} = \sum_{\ell=n+p}^{m+p} a_\ell$$

  en posant $\ell = k+p$ dans les termes de la somme et en remarquant que ℓ prend alors toutes les valeurs entre $n+p$ et $m+p$. On rajoute donc une constante aux bornes de la somme que l'on s'empresse de retirer dans les indices des termes de la somme pour que, globalement, aucun terme ne change vraiment.

- Pour "renverser" les termes de la somme, pour les sommer "à l'envers"

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell$$

en posant $\ell = n - k$ dans les termes de la somme et en remarquant que ℓ prend alors toutes les valeurs entre 0 et n mais ils sont alors listé dans l'ordre inverse.

k	0	1	2	$\ldots$	$n-2$	$n-1$	n
$\ell = n-k$	n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	2	1	0

Cependant, on écrit pas $\sum_{\ell=n}^{0}$ car en vertu de la convention du début de chapitre, la somme serait nulle. Il faut remettre les termes dans le bon sens, dans le sens des indices croissants (puisque de toutes façons, ça ne change rien) grâce à la commutativité.
- Si l'on veut changer les bornes de la somme (le contraire du premier point, en gros). Par exemple

$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell+2}$$

en posant $\ell = k - 2$ de telle sorte que ℓ aille de 0 à n quand k va de 2 à $n+2$. Il ne faut pas oublier de modifier les indices en conséquence. Comme on fait un changement d'indice, il ne peut y avoir de k et de ℓ en même temps dans la somme. Il faut donc exprimer l'indice k en fonction de ℓ (ce qui est facile avec l'expression de ℓ).

Proposition 1.4 (Changement d'indice) :
Soit I et J deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$. Si $\{a_i,\ i \in I\} = \{a_j,\ j \in J\}$, alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j$$

Autrement dit, pour effectuer un changement d'indice, il faut sommer toujours les même éléments. Un changement d'indice est donc essentiellement une renumérotation des termes de la somme.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il ne suffit pas de faire en sorte que les bornes de la somme soit correctes. Il ne suffit pas de vérifier que tout se passe bien aux bornes de sommation. Par exemple, si $S = \sum_{k=0}^{3} a_{2k}$, on pourrait naïvement effectuer le changement d'indice $\sum_{\ell=0}^{6} a_\ell$. Mais $S = a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ alors que $\sum_{\ell=0}^{6} a_\ell = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ qui ne sont clairement pas égales.

En dépit du fait que les bornes de l'intervalle de sommation des deux sommes se correspondent bien, on a $\{a_{2k}, 0 \leq k \leq 3\} \neq \{a_\ell, 0 \leq \ell \leq 6\}$. Dans les deux sommes, on ne somme donc pas les même éléments. Il y a plus de termes dans la deuxième somme. Ce qui fait que ce n'est pas un changement d'indice.

On peut noter aussi ça sous la forme : si $f : I \to J$ est une bijection avec I et J deux ensembles finis, alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{f(i)}$$

en posant le changement d'indice $j = f(i)$.

Exemple 1.5 :
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$$

1.1.5 Sommation par paquets

La sommation par paquets consiste simplement à regrouper les termes de la somme en paquets. Comme son nom l'indique. Il n'y a pas vraiment de bonne méthode ici. Les paquets à faire dépendent entièrement de la forme des termes de la somme. Il faut juste trouver les bons paquets qui vont faciliter le calcul de la somme.

Il y a cependant deux regroupements par paquets classique.

Découpage d'une somme

En prenant des entiers $n \leq p \leq m$, on peut découper une somme

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{m} a_k$$

Ce découpage consiste simplement à regrouper les premiers termes d'un côté et le reste de l'autre, grâce à l'associativité.

Exemple 1.6 :
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ et $\sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$

Séparation en termes d'indice pairs et impairs

Cette séparation est certainement la plus naturelle quand on pense à regrouper les termes en paquets. Il y a plusieurs façons de procéder. Je vous en propose une qui a l'avantage d'être assez détaillé pour ne pas trop se tromper :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ pair}}}^{m} a_k + \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ impair}}}^{m} a_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n\leq k\leq m\\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{n\leq k\leq m\\ k \text{ impair}}} a_k \\
&= \sum_{n\leq 2i\leq m} a_{2i} + \sum_{n\leq 2j+1\leq m} a_{2j+1} && \text{deux changements d'indices}\\
&= \sum_{n/2\leq i\leq m/2} a_{2i} + \sum_{(n-1)/2\leq j\leq (m-1)/2} a_{2j+1}
\end{aligned}$$

Exemple 1.7 :
Calculer les sommes suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k$$

1.2 Sommes classiques

1.2.1 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 1.5 (Identité de Bernoulli ("3ème identité remarquable") [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)\\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k
\end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n} a^\ell b^{n-\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

On peut le faire aussi par télescopage (ce qui revient au même) :

$$(a-n)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right) = a^n - b^n.$$

□

Exemple 1.8 :
Soit $a \in \mathbb{C}$. Factoriser $a^n - 1$ et $a^{2n+1} + 1$.

Ces exemples sont capitaux. Ces factorisations interviennent régulièrement. C'est presque une nouvelle "identité remarquable".

1.2.2 Sommes arithmétiques et géométriques

Définition 1.3 (Suite arithmétique (Rappel)) :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* si $\exists r \in \mathbb{C}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + r$.

La constante r est appelée *raison* (arithmétique) de la suite.

Remarque :
On rappelle également que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on peut en déduire une expression des termes de la suite en fonctions de n (par une récurrence pas très dure) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + nr$.

Proposition 1.6 (Sommes d'une suite arithmétique) :
La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égal à la moyenne des termes extrêmes fois le nombre de termes dans la somme, *i.e.* c'est la somme des termes extrêmes, divisée par 2, fois le nombre de termes :

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et $n \leq m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = (m-n+1)\frac{a_n + a_m}{2}$$

Démonstration :
On utilise la technique de Gauss. On note $S = \sum_{k=n}^{m} a_k$. On note r la raison de la suite $(a_n)_n$. On a alors

$$2S = \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} a_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} a_{m-k+n} \\
&= \sum_{k=n}^{m} (a_k + a_{m-k+n}) \\
&= \sum_{k=n}^{m} (a_n + (k-n)r + a_n + (m-k+n-n)r) \\
&= \sum_{k=n}^{m} (2a_n + (m-n)r) \\
&= \sum_{k=n}^{m} (a_n + a_m) \\
&= (a_n + a_m) \sum_{k=n}^{m} 1 \\
&= (m-n+1)(a_n + a_m)
\end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration. □

On peut changer cette expression aussi pour donner une formule en fonction de la raison de la suite arithmétique. Si r est la raison de la suite, on obtient

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = (m-n+1)\frac{(2a_n + (m-n)r)}{2} = (m-n+1)\frac{(2a_0 + (m+n)r)}{2}$$

Définition 1.4 (Suite géométrique (Rappel)) :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* si $\exists q \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = qa_n$.
La constante q est alors appelé *raison* (géométrique) de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque :
De la même manière que pour les suites arithmétique, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors on peut en déduire une expression des termes de la suite en fonction de n (encore par une récurrence facile) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0q^n$.

Proposition 1.7 (Somme géométrique [✓]) :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et $n \leq m \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (m-n+1)a_n = (m-n+1)a_m & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En français, la somme de p termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 est le premier terme qui est dans la somme moins le premier qui n'y est pas, divisé par 1 moins la raison.

Le cas le plus intéressant est bien sûr

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Attention ! C'est la première disjonction de cas que nous croisons. Ne surtout pas faire comme s'il n'y en avait pas. Il ne faut pas oublier cette disjonction de cas. Il faut donc d'abord étudier la suite pour savoir dans quel cas on est AVANT de se lancer dans les calculs.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m} a_k &= \sum_{k=n}^{m} q^k a_0 \\ &= a_0 \sum_{k=n}^{m} q^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{m-n} q^{k+n} \\ &= a_0 \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q} && \text{cf factorisation de } 1 - q^{m-n+1} \\ &= \frac{a_n - a_{m+1}}{1-q} \end{aligned}$$

□

Exemple 1.9 :
Soit $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$. Calculer $\sum_{k=3}^{5} u_k$.

1.2.3 Sommes binomiales

Définition 1.5 (Factorielles [✓]) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le produit $n!$, prononcé "n factoriel", par

$$n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Donc $n!$ est le produit de tous les entiers inférieurs ou égaux à n (si $n \geq 1$ et 1 sinon).

Cette définition fait partie des victimes des différentes modifications des programmes de lycée. Elle n'aurait jamais du être supprimée.

Proposition 1.8 (Relations arithmétique des factorielles [✓]) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1) \times n! = (n+1)!$$

Démonstration :
C'est évident. □

Exemple 1.10 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :

$$\frac{(n! + (n+1)!)(n+1)}{(n+2)!}.$$

Exemple 1.11 :
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!.$$

Définition 1.6 (Coefficient binomial [✓]) :
Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On définit le *coefficient binomial k parmi n* par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On retiendra aussi en particulier (ça revient très souvent) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarque :
On donne deux expressions de la définition du coefficients binomiales qui sont, en fait, rigoureusement identiques. L'une n'est que la simplification de l'autre, et l'autre est la version condensée de l'une. Les deux sont importantes.

Bien entendu, pour les calculer (donc sans calculatrices, car vous avez les avez déjà brûlé depuis longtemps et ne contentez en aucun en racheter une ou alors pour vous chauffer) on utilisera surtout la première expression. Il y a moins de produits à effectués. Certains simplifications ont déjà été faites. Certaines propriétés suivantes permettent d'ailleurs de pouvoir encore simplifier les calculs éventuels.

La seconde expression est surtout intéressante (parce qu'elle est belle et) pour les expressions littérales. C'est c'elle qu'on préféra utiliser dans les calculs abstraits (sans valeurs spécifiques pour n et k).

Remarque :
La nullité du coefficient binomial dans le cas où $k \notin [\![0, n]\!]$ est une convention utile pour permettre de pouvoir écrire des formules et faire des calculs sans faire de disjonction de cas (et donc scinder les sommes) peu esthétiques et fastidieux.

Exemple 1.12 :
Soit $a, p \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$a\binom{n}{p} = \binom{n}{p+1}$$

d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

Les quelques propriétés suivantes sont en réalités des exercices de niveaux terminales. Mais il faut savoir les faire, les connaître et les utiliser.

Proposition 1.9 (Formule de Pascal [✓]) :
Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq k \leq n-1$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :
il suffit de faire le calcul et simplifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} && \text{def coeff bin} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1} && \text{def coeff bin}
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.10 (Propriétés arithmétiques des coefficient binomiaux [✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a les propriétés suivantes :

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ [Symétrie]
- $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ [Formule de pion [a]]

a. Cette formule s'appelle parfois la *formule du pion* ou *la formule du capitaine*, et parfois *la formule du chef*. La dénomination n'est pas fixe. La formule du pion fait référence à la position des deux coefficients binomiaux an présence qui rappelle le déplacement d'un pion aux échecs. La formule du capitaine fait référence au sens qu'on peut donner à la formule dans sa démonstration combinatoire.

On donnera également une interprétation concrète de ces coefficients binomiaux dans le chapitre sur le dénombrement.

Démonstration :
La démo est laissée à vos soins. C'est un exercice de terminale. □

Le second point de la proposition précédente permet également de simplifier les calculs des valeurs des coefficients binomiaux : par exemple :

$$\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220.$$

Exemple 1.13 :
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n}$ est pair.

> Notation :
> Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble de tous les entiers relatifs compris entre a et b, *i.e.* :
> $$[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{Z},\ a \leq k \leq b\}.$$

En général, on utilise cette notation avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Mais elle a parfaitement un sens y compris si ce n'est pas le cas.

Proposition 1.11 (Binôme de Newton [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

On notera qu'on a immédiatement aussi le développement de $(a-b)^n$ en remplacer b par $-b$ (et en prenant garde aux signes). On vient donc de donner les versions pour les grands des identités remarquables que vous connaissiez étant petits.

Démonstration :
La démonstration peut se faire facilement par récurrence sur n. On a déjà

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^0$$

Si l'on suppose que la formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{def puissance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{distributivité}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} \qquad \text{chgt indice}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + b^{n+1} \qquad \text{regrpmt par paquet}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a^i b^{n-i+1} + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1} + b^{n+1} \qquad \text{triangle de Pascal}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1}$$

□

Remarque :
On reverra le binôme de Newton dans d'autres situation et nous referons les démonstrations régulièrement également pour bien comprendre comment se manipule les nouveaux objets que nous croiserons au fur et à mesure de l'année.

Nous verrons même une autre démonstration complètement nouvelle dans le chapitre sur le dénombrement.

Exemple 1.14 (À connaître [✓]) :
Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

Ces deux sommes sont à connaître. Il faut pouvoir les reconnaître quand elles apparaissent, connaître le résultat et savoir le démontrer.

Exemple 1.15 :
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sommes
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}$$

Exemple 1.16 :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$S = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \left(\binom{2p}{k} - \binom{2p}{k-1} \right).$$

1.3 Sommes doubles

1.3.1 Définition et notations

Définition 1.7 (Somme double) :
Une somme double est une somme se faisant sur deux indices, *i.e.* si $p, q, n, m \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$ et $n \leq m$ et $\forall i \in \{p, \ldots, q\}$ et $\forall j \in \{n, \ldots, m\}$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. Une somme double est une somme du type

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq q \\ n \leq j \leq m}} a_{i,j}$$

Remarque :
Pour faire une somme double, il faut donc sommer des termes dépendant de deux indices. Il doit y avoir deux lettres qui apparaissent. Et attention ! Il faut prendre garde à ne pas utiliser la même lettre pour les deux indices différents. Ils n'ont pas de raison d'être égaux a priori.

Faire une somme double revient à faire une sommes de termes dont les indices serait sur un morceaux de pavages.

Exemple 1.17 :
En version développé, on a

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}$$

On peut aussi noter

$$\sum_{\substack{p \leq i \leq q \\ n \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![n,m]\!]} a_{i,j}$$

et dans le cas où $p = n$ et $q = m$, on peut encore raccourcir ça en

$$\sum_{i,j \in [\![n,m]\!]} a_{i,j} = \sum_{n \leq i,j \leq m} a_{i,j}$$

mais la notation $\sum_{i,j=n}^{m} a_{i,j}$ n'a pas de sens ! Le problème venant de l'ambiguïté de la notation. On ne sait pas très bien comment varie i par rapport à j. La notation pourrait signifier que i et j vont de n à m en même temps, donc que les indices sont égaux. Ou alors qu'on donne une information sur j, mais qu'on ne sait pas très bien sur i.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il faut être méticuleux avec les sommes doubles. Il y a deux indices. Et il pourrait très bien avoir des dépendances entre les deux indices de sommations (ce sera les cas intéressants). Ce qui contraint les manipulations. Voir plus bas.

Proposition 1.12 (Somme double sans dépendance des indices de sommation) :
Soit $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ et $p \leq q$. Alors

$$\sum_{\substack{n\leq i\leq m \\ p\leq j\leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=n}^{m}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=n}^{m} a_{i,j}$$

Démonstration :
Il suffit de regrouper par paquets :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq i\leq m \\ p\leq j\leq q}} a_{i,j} &= \sum_{i=n}^{m}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=n}^{m} a_{i,j}\end{aligned}$$

□

Écrit sous la forme de deux sigma, une somme double correspond alors simplement à une somme simple (la somme “extérieure”) pour laquelle chacun des termes est lui même une somme. Ça se traite donc comme une simple et chaque terme est aussi une somme simple.

Dans le cas où il y a une dépendance dans les indices de sommations, ce sera toujours dans le même sens. Les bornes de la deuxième somme ("la somme intérieure") peuvent dépendre de l'indice de la première somme (de "la somme extérieure"). Par exemple

$$\sum_{k=n}^{m}\sum_{i=0}^{k} a_{k,i}$$

en revanche, les bornes de la somme extérieures *NE PEUVENT JAMAIS* dépendre de l'indice de la somme intérieure. On n'aura donc jamais $\cancel{\sum_{k=i}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}}$ par exemple. Donc si on se trouve dans un tel cas, c'est qu'il y a une erreur. Je rappelle que l'indice de sommation est une variable muette. Elle n'a donc de sens *qu'à l'intérieure* de la somme. Si l'indice de sommation sort de la somme, il perd alors tous son sens. Il ne veux plus rien dire.

Exemple 1.18 :
Parmi les sommes suivantes, dire lesquelles ont un sens et lesquelles n'en ont pas.

$$\sum_{1\leq i,k\leq n} k^i \qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{2k}\frac{1}{i} \qquad \sum_{k=n-i}^{n+i}\sum_{i=0}^{n} a_{i,k}$$

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ n-i\leq k\leq n+i}} a_{i,k} \qquad \sum_{i=j}^{j^2}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$$

En ce qui concerne les notations condensées, il faut simplement transformé une somme écrite sous la forme d'une somme double $\sum_{i=n}^{m}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}$ sous une forme avec un seul sigma (mais qui à la valeur de deux) $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$. La gestion des indices doit correspondre à l'écriture avec les deux sommes. Dans les deux cas, on doit sommer la même chose. Donc l'ensemble des valeurs sommées doit être les mêmes. Par exemple

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$$

1.3.2 Règles de calcul

Les règles de calculs sont exactement les mêmes que pour les sommes simples. Il faut juste faire attention à faire les opérations deux fois. On notera aussi qu'il est possible éventuellement de mettre en facteur des éléments dans la seconde somme :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_{i,j}\right)$$

Cette remarque peut permettre de factoriser les deux sommes. Dans le cas où le termes de la seconde somme ne dépendent pas des indices de la première somme, on peut séparer les indices, ce qui permet de factoriser la double somme :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

(on appelle ce genre de somme, des sommes à variables séparées. Vous reverrez ce genre de chose en deuxième année avec les intégrales doubles).

Exemple 1.19 :
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$$

1.3.3 Interversions des signes sommes

Cette "astuce" est une des plus utiles dans le cas des doubles sommes. On la retrouvera également dans le cas des intégrales doubles.

Proposition 1.13 (Interversions des signes sommes) :
Si les bornes des sommes ne dépendent pas des indices, alors on peut intervertir les signes $\sum$, *i.e.* si $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ et $p \leq q$ et $\forall i \in [\![n, m]\!], \forall j \in [\![p, q]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, alors

$$\sum_{i=n}^{m}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=n}^{m} a_{i,j}$$

En termes vaguement plus général : si I et J sont des ensembles fini qui ne dépendent pas l'un de l'autre, alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}$$

Dans tous les autres cas (*i.e.* dans les cas où les bornes des sommes dépendent des deux indices de sommation), les choses doivent se faire au cas par cas. Et bien sûr, après interversion, les bornes des sommes vont encore dépendre des indices de sommation, mais différemment. On ne peut pas se débarrasser d'une dépendance aussi facilement. Les mauvaises habitudes ont la vie dures. On garde donc une dépendance des bornes des sommes.

On va faire un exemple pour "voir" ce qu'il se passe plus précisément. On va étudier le cas $S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$. On a $S = \sum_{0\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$. En tableau, on a donc les coefficients :

$i\backslash j$	0	1	2	3	4	$\dots$
0	$a_{0,0}$					
1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$				
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$			
3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$		
4	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	
$\vdots$						

Donc S correspond en fait à faire la somme des éléments de ce tableau. En sommant d'abord en ligne puis en colonne, on a la définition de S, *i.e.* $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$. Mais on peut sommer d'abord en colonne puis en ligne, ce qui nous donne $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$.

Exemple 1.20 :

- Écrire de deux façons $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}$.
- Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k$ et donner une expression simple de cette omme.

1.3.4 Sommation par paquets

On va traiter un exemple pour voir comment traiter le regroupement par paquets dans le cas de sommes doubles. Comme dans les sommes simples où on regroupe en fonction des paquets qui nous intéressent, dans le cas des sommes doubles il n'y a pas non plus vraiment de formule que l'on peut donner. Le regroupement par paquets qu'on utilise de fait en fonction de ce qui est plus utile au vu des termes de la somme.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $S = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$. On veut calculer cette somme. On a alors 3 “groupes” qui apparaissent naturellement. Les couples (i,j) tels que $i<j$, les couples (i,j) tels que $j<i$ et les couples (i,j) tels que $i=j$. On alors

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \max(i,j) + \sum_{1\leq j<i\leq n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i) && \text{regroupement par paquets} \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} j + \sum_{1\leq j<i\leq n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{1\leq i<j\leq n} j + \sum_{i=1}^{n} i && \text{variables muettes} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} && \text{somme de Gauss}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j^2 - 2\sum_{j=2}^{n} j + \frac{n(n+1)}{2} && \text{linéarité de la somme} \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + \frac{n(n+1)}{2} && \text{somme de Gauss} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

2 Produits

2.1 Le symbole $\prod$

Définition 2.1 (Produit) :
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \{n, \dots, m\}$, $a_k \in \mathbb{C}$. On pose

$$
\prod_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n \times a_{n+1} \times \cdots \times a_{m-1} \times a_m & \text{si } n \leq m \\ 1 & \text{si } n > m \end{cases}
$$

Similairement aux sommes, on peut noter ce produit également $\prod_{n \leq k \leq m} a_k$ ou encore $\prod_{k \in \{n,\dots,m\}} a_k$. Et ce produits comporte $m - n + 1$ facteurs et se lit “produit pour k allant de n à m des a_k”.

De même que pour la somme, il y a une convention selon laquelle, si $n > m$, le produit correspond à l’élément neutre pour la multiplication, c’est-à-dire à 1. Mais là aussi, on n’utilisera pas (ou très peu) cette convention.

On notera que les éléments d’un produit sont des *facteurs*, et non plus des *termes*.

Exemple 2.1 :

- Calculer $\prod_{k=0}^{n} 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer $\prod_{k=-1000}^{1000} k \ln(1 + |k|)$.

2.2 Règles de calculs

Les règles sont assez similaires à celles pour les sommes, mais en version produits :

Proposition 2.1 (Règles de calcul [✓]) :
Soit $n \leq m \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in [\![n, m]\!]$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\prod_{k=n}^{m} a_k b_k = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right)\left(\prod_{k=n}^{m} b_k\right)$ *[Commutativité]*
- Si $p \in \mathbb{N}$ alors $\prod_{k=n}^{m} a_k^p = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right)^p$.
- Si $s \in \mathbb{Z}$ et $\forall k \in [\![n, m]\!]$, $a_k \neq 0$, alors $\prod_{k=n}^{m} a_k^s = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right)^s$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall n \leq k \leq m$, $a_k > 0$, alors $\prod_{k=n}^{m} a_k^\lambda = \left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right)^\lambda$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=n}^{m} \lambda a_k = \lambda^{m-n+1} \prod_{k=n}^{m} a_k$.

Démonstration :
La démonstration est laissée en exercice. (À faire donc et à savoir faire ...) □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention ! La mise en facteur dans les produits ne fonctionne plus. C'est un produit. Pas une somme. On ne peut donc pas factoriser de la même manière que pour les sommes. Il ne suffit pas de mettre le facteur commun devant la somme. Il faut compter le nombre de fois qu'il apparaît (donc le nombre de facteur du produit) et le mettre en puissance. Par exemple, $(2 \times 3) \times (2 \times 4) = 2^2 \times (3 \times 4)$ et non pas $2 \times (3 \times 4)$.

Proposition 2.2 (Changement d'indice) :
Soit I, J deux ensembles et $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(b_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$ deux familles de nombres.
Si $\{a_i,\ i \in I\} = \{b_j,\ j \in J\}$, alors

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{j \in J} b_j.$$

Autrement dit, on peut appliquer le même genre de manipulation des changements d'indices des sommes sur les produits. Tant que l'ensembles des éléments dont on fait le produit ne change pas entre l'avant et l'après changement d'indices.

Exemple 2.2 :

$$\prod_{k=1}^{n} (k+n) = \prod_{j=n+1}^{2n} j = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n} j} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Exemple 2.3 :
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

2.3 Produit télescopique

Proposition 2.3 (Produits télescopiques) :
Soit $n \leq m \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \{n, m+1\}$, $a_k \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\prod_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_n}$$

Démonstration :
La démonstration est aussi laissée en exercice. C'est facile. □

Exemple 2.4 :
Calculer $\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$ et $\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$.

2.4 Passage au logarithme

C'est une particularité des produits. Une astuce qui s'avère souvent utile quand on manipule des produits. Elle permet de transformer un produit en somme ce qui est lus agréable car on a plus de technique à notre disposition sur les sommes et surtout, on a (va avoir) plus l'habitude de manipuler des sommes que des produits.

Proposition 2.4 :
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ et $\forall k \in [\![n, m]\!]$, $a_k > 0$. Alors

$$\ln\left(\prod_{k=n}^{m} a_k\right) = \sum_{k=n}^{m} \ln(a_k)$$

Il n'y pas grand chose à démontrer. C'est simplement par propriété du logarithme. Mais attention ce pendant. Il est NÉCESSAIRE que les a_k soit réels d'une part, et qu'ils soient *strictement positifs* d'autre part. Sinon, on ne peut pas prendre le log.

Exemple 2.5 :

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.