Chapitre 1 - TD :
Calculs Algébriques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

4 septembre 2024

1 Sommes simples et coefficient binomiaux

Exercice 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelles. Donner les conditions, sur les entiers p et q, d'existence de la somme suivante et la simplifier :

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 2 :
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $\sum_{k=3}^{n+1} k$ 2) $\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$ 3) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

4) $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^2$ 5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

7) $\sum_{k=1}^{n} kk!$

Exercice 3 :
Montrer que $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k}\binom{kn}{(k-1)n} = \binom{kn-1}{(k-1)n}.$$

Exercice 4 ([✓]) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Exercice 5 ([✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

Exercice 6 :
Simplifier, pour tout $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

Exercice 7 ([✓]) :

1. Montrer que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \neq 1$,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}$$

2. En déduire une simplification pour tout $n \geq 2$ de

$$v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

Exercice 8 :
On rappelle que $\forall x \not\equiv 0[\pi]$, $\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ avec $y \not\equiv 0[\pi/2]$,

$$\operatorname{cotan}(y) - 2\operatorname{cotan}(2y) = \tan(y).$$

2. En déduire une expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0[\pi/2]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, de

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x).$$

Exercice 9 (Transformation d'Abel (*)) :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit alors deux autres suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. Calculer, en appliquant la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k 2^k$.

Exercice 10 (*) :

1. Étude de la croissance des factorielles.
   (a) Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n < m$, alors $n! < m!$.
   (b) Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n! < m!$, alors $n + 1 \leq m$.
2. On va résoudre maintenant l'équation $n! + m! = p!$ où $n, m, p \in \mathbb{N}$. Pour cela, on considère un triplet solution.
   (a) Montrer que $n! = 1$.
   (b) Résoudre le problème.

Exercice 11 ([✓]) :
Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1}$$

Exercice 12 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 13 :
Le but de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{1+\alpha_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n, b_n \in \mathbb{N}$, $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ en utilisant le binôme de Newton.
2. Montrer également que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.
4. En déduire le résultat attendu.

Exercice 14 (**) :

1. En introduisant le polynôme $P(X) = (1+X)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et ses dérivées première et seconde, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$
2. Avec la même méthode et le polynôme $P(X) = \frac{1}{2}((1+X)^{2n} + (1-X)^{2n})$, calculer
$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k}$$

Exercice 15 (***) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$
   (b) En déduire que
   $$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \binom{2n}{k-1} < \binom{2n}{k}$$
   et que
   $$\forall k \in \{n, \ldots, 2n-1\},\ \binom{2n}{k+1} < \binom{2n}{k}.$$
   (c) Comment interpréter les résultats de la question précédente ?
2. Montrer enfin que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Exercice 16 (*) :
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 17 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$
et
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}.$$

2 Sommes doubles

Exercice 18 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Développer
$$(a+b+c)^n.$$

Exercice 19 :
Calculer les sommes suivantes
$$S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) \quad S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij \quad S_3 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j|$$
$$S_4 = \sum_{1\leq i<j\leq n} i \quad S_5 = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij \quad S_6 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$$

Exercice 20 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(i^k).$$

Exercice 21 :
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{\min(i,j)}.$$

Exercice 22 :
Calculer les sommes suivantes en faisant intervenir des sommes doubles
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 23 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$C_n = \sum_{1\leq p<q\leq n} (p+q).$$

1. Exprimer la somme $\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)$ en fonction de C_n.
2. En déduire la valeur de C_n.

Exercice 24 ([✓]) :
Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}$$

Puis en déduire la valeur de la somme quadruple :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq \ell\leq n}\frac{i}{jk\ell}.$$

***Indic :** Penser à un exercice précédent pour S_2*

Exercice 25 :
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

Établir que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n$$

Exercice 26 ([✓]) :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$
2. Si $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$, comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.$$
3. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k.$$

Exercice 27 :
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}\right).$$

3 Produits

Exercice 28 :
Simplifier, pour tout $n \geq 2$, le produit suivant

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Pourquoi n'a-t-on pas pris $n \in \mathbb{N}^*$ ou $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 29 :
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

1. Directement
2. Par récurrence.

Exercice 30 :
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=0}^{n} ((2k+1)!) \geq ((n+1)!)^{n+1}.$$

Exercice 31 (*) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$$

et en déduire

$$\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

Exercice 32 :
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$V = \prod_{1 \leq i,j \leq n} ij \quad W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij \quad X = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

$$Y = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij \quad Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Calculer V. En déduire W. Montrer que $X = Y$ puis exprimer W en fonction de X et Y. En déduire X puis Z.

Exercice 33 :
Déterminer la limite de la suite (P_n) définie par

$$\forall n \geq 1, \ P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

Exercice 34 :
Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

1. Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \geq 1$,

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

2. En déduire une simplification de u_n.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 35 (*) :

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{n+p+1}{n}.$$

2. Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j).$$

Exercice 36 :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right).$$

1. Calculer P_n quand $a = 1$.
2. Calculer$(1-a)P_n$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P_n.

Exercice 37 (*[✓]) :
Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(\alpha/2^k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\sin(\alpha/2^n)P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de P_n.