DS 1
Révisions

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 14 Septembre 2022

Le devoir dure 3h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 :
Ce problème tente d'étudier la fonction f d'expression $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{e^x-1}$.

1. *Question préliminaire :* Montrer que si $k : I \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante sur I et si $a, b \in I$ avec $k(a) < k(b)$, alors $a > b$.
2. Donner le domaine de définition de f.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
4. On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x-x\ln(x))e^x - 1 \end{array}$$
   (a) Justifier que g est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) On pose $h : x \mapsto 1 + x + \ln(x) + x\ln(x)$.
      i. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\forall x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2$.
      ii. Justifier que h' est dérivable et calculer h''.
      iii. Étudier les limites de h' et h.
      iv. En déduire le tableau de variations de h.
      v. Montrer que $\exists! \alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$, puis montrer que $\alpha \in]0, 1[$.
   (c) Étudier les limites g.
   (d) En déduire le tableau de variations de g.
   (e) Justifier qu'il existe $\beta > \alpha$ tel que $g(\beta) = 0$.
   (f) En déduire que $\beta < 1$.
   (g) En déduire le signe de g.

5. Étudier les limites f.
6. Déduire de ce qui précède le tableau de variations de f.
7. Montrer que
$$f(\beta) = \frac{1}{\beta e^{\beta}}.$$

Exercice 2 (Logique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les assertions suivantes avec des quantificateurs.

1. La fonction f est nulle.
2. La fonction f s'annule.
3. La fonction f n'est pas croissante.
4. 3 a au moins deux antécédents par f.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

Exercice 3 (Logique) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la négation des assertions suivantes :

1. $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x) \geq 0 \implies x \geq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.
4. $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x) < 0 \iff x \in]0, 1[)$.

Exercice 4 (Différents modes de raisonnements) :
Les questions se traitent avec des modes de raisonnements différents.

1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $-4x = \sqrt{7x^2 + 1}$.
2. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$: $|3 - x| \leq 3x + 1$.
3. [Récurrences]

   Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

4. [Contrapositions]

Les questions sont indépendantes.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.

(b) Soit $n_1, \ldots, n_9 \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{k=1}^{9} n_k = 90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Indic : *On pourra commencer par ordonner les entiers.*

Exercice 5 (BONUX) :

Exercice à n'aborder que si plus de 75% du sujet a été (bien) abordé au moins.

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$