DM 1
Calculs Algébriques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 24 Septembre 2024

Problème 1 (Manipulations classiques de sommes) :
On définit la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ par

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ \forall n \geq 4,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{cases}$$

On admet que $\forall n \geq 2,\ 1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} a_j = n!$.

1. On fixe $n \geq 2$. On va, dans cette question, "renverser" la somme précédente, c'est-à-dire qu'on va essayer d'exprimer les a_n en fonction de $n!$.
   (a) Montrer que $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} = -n(-1)^{n-1} - (-1)^n$.
   (b) Montrer que $\forall i, j \in \{2, \dots, n\}$ avec $j \leq i$, on a $\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}$
   (c) En déduire $\forall j \in \{2, \dots n\}$, $\sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j < n \end{cases}$.
   (d) En déduire que $\sum_{i=2}^{n} \left(\binom{n}{i}(-1)^{n-i} \sum_{j=2}^{i} \binom{i}{j} a_j\right) = a_n$.
   (e) Conclure que $a_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} k!$.
2. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geq 2,\ a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
3. Montrer que cette expression de a_n vérifie bien la relation de récurrence de la définition de la suite (a_n).

Problème 2 (Sommes trigonométriques et inégalités) :
Le but de ce problème est l'étude de la somme $C_n(\theta)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ C_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \cos(k\theta)$$

1. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $C_1(\theta) \geq 0$ et $C_2(\theta) \geq 0$
2. (a) Justifier que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\cos(p\pi) = (-1)^p$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{C}_n(p\pi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{Z}$.

3. (a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(\theta)e^{i\theta} = -i\sin(\theta)e^{i\theta}$.
   (b) On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(\theta)^k \sin(k\theta).$$
   Calculer alors $C_n(\theta) + iS_n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ C_n(\theta) = \frac{\cos(\theta)^{n+1}\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$
4. Étudier le signe de $C_3(\theta)$ en fonction de θ sur $[-\pi, \pi]$.
5. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |C_n(\theta)| \leq \frac{|\cos(\theta)|^{n+1}}{|\sin(\theta)|}.$$
   (b) En déduire la limite de $C_n(\theta)$ quand n tend vers $+\infty$.