Chapitre 3 :

Ensembles, Applications et Relations d'Équivalence

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

17 septembre 2024

If you consider the set of all sets that have never been considered, will it disappear ? ?

La notion d'ensemble est une notion fondamentale en mathématiques. C'est la base de toutes les études mathématiques. On étudie des ensembles d'objets vérifiant une certaine propriété ; on étudie des ensembles ayant eux même des propriétés...

Si c'est une notion fondamentale, elle n'est pour autant pas facile à définir. À l'instar de beaucoup d'autre notions, cette définition a évolué avec le temps. Dans un premier temps, on a considéré que des ensembles finis. Mais c'était trop restrictif.

On a ensuite considéré les ensembles avec une définition relativement naïve car intuitive où l'on définissait les ensembles comme des collections d'objets (finies ou non). C'est dans cette théorie que Cantor, père de la théorie des ensembles, a travaillé et a établit la distinction entre l'infini de $\mathbb{N}$ (infini dénombrable) et l'infini de $\mathbb{R}$ (infini non dénombrable, ou infini continue), dont nous aurons l'occasion de reparler.

Mais cette définition naïve d'ensemble a ses limites et engendre des paradoxes comme l'a montré Bertrand Russel en 1901. En effet, avec l'approche naïve, on ne demande rien à un ensemble, sauf de contenir des objets. En particulier, dans l'approche naïve, un ensemble étant un objet particulier, un ensemble pourrait se contenir lui même (ce qui est déjà désagréable). En considérant alors l'ensemble R de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-même, on a alors deux situations possibles : soit $R \in R$, soit $R \notin R$. Mais dans les deux cas, on aboutit à une absurdité. En effet, si $R \in R$, alors par définition, R ne se contient pas lui même et donc $R \notin R$. Et si $R \notin R$, alors il ne se contient pas lui même et donc, par définition, $R \in R$. ☠.

Il a fallu alors remanier un petit peu la définition d'ensemble pour éviter ce paradoxe. Les modifications apportées sont assez techniques et donnent une nouvelle définition d'un ensemble qui reste cohérente avec le cadre naïf dans une utilisation "non pathologique". Autrement dit, si l'on se contente d'un cadre naturel sans aller essayer de titiller la solidité de la définition d'un ensemble, l'approche naïve est suffisante (et coïncide parfaitement avec la bonne définition d'un ensemble). Comme notre but cette année n'est pas d'étudier réellement la logique, nous nous contenteront d'utiliser des ensembles.

Il peut être utile, toutefois, de garder à l'esprit que l'approche que nous introduisons ici a des limites et qu'en la poussant un peu dans ses retranchement, on aboutit à des absurdités (comme le paradoxe de Russel, par exemple).

> La théorie des ensembles est une maladie
> dont les générations futures se remettront.
>
> *Henri Poincaré*
> (Citation contestée)

Table des matières

1 Ensembles

1.1 Ensembles et sous-ensembles

Cette première partie du cours ne sera pas parfaitement rigoureuse. Pour deux raisons qui se rejoignent. Le but du programme n'étant pas l'étude de la théorie des ensembles (théorie très belle, mais très difficile du point de vue de l'abstraction), le but est d'établir uniquement ce dont on a besoin pour pouvoir fonctionner correctement sur le reste de l'année. la théorie des ensembles, pour être bien comprise et correctement faite, nécessite un assez grand recul sur les mathématiques en général. Ce que nous n'avons pas encore. On se contentera donc d'une approche naïve avec tous les problèmes que cela pourra engendré.

Cantor définit les ensembles de la façons suivante :

> Par ensemble, on entend un groupement en un tout, d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée.
>
> Georg Cantor

Remarque :
Le problème de cette définition provient du manque de rigueur de ce que sont les objets qui constituent un ensemble. Ce manque de rigueur rend la définition très molle. On peut y mettre absolument ce que l'on veut. Et c'est là le problème. Avec cette définition, comme il n'y a aucune restriction, on pourrait mettre dedans l'ensemble lui même. Autrement dit, avec cette définition, un ensemble pourrait s'auto-contenir. On sent assez bien que cela pourrait engendré quelques traquenards.

C'est là qu'est intervenu Bertrand Russel pour montrer que cette définition, avec son manque de rigueur, mène à des absurdités. Comme un ensemble peut se contenir lui même (pour le moment), ou pas, on peut considérer l'ensemble R des ensembles qui ne s'auto-contiennent pas. Par le principe du Tiers-Exclu, il ne peut alors se produire que deux situations. Ou bien $R \in R$ ou bien $R \notin R$. Mais si $R \in R$, alors R s'auto-contient et donc, par définition de R, $R \notin R$. ☠. Et si $R \notin R$, alors par définition, R ne s'auto-contient pas, et donc, par définition de R, $R \in R$. Donc ☠.

L'approche naïve n'est donc pas satisfaisante. Mais la rigueur nécessaire à l'établissement d'une définition qui n'aboutit pas à des absurdités est assez désagréable. Souvent, les choses les plus triviales sont les plus difficiles à décrire correctement. Les questions de logiques soulevées par cette définition sont de trop haut niveau pour qu'il soit raisonnable de les étudier en première année.

Cette définition n'étant pas complètement satisfaisante de part la trop grande liberté qu'elle laisse, nous lui adjoindrons une limitation elle même assez intuitive. Il est assez naturelle de comprendre la définition de Cantor comme "une collection d'objets *autre que lui même*". C'est ce que nous ferons. Et on se contentera de cette définition.

Définition 1.1 (Ensemble) :
Un *ensemble* E est une "collection" d'objets mathématiques, tous distincts, appelés *éléments* de cet ensemble E, qui ne doivent pas être l'ensemble lui même.

Il y a (essentiellement) deux façons d'introduire un ensemble :

- La plus simple est la façon *descriptive* qui consiste simplement à donner la liste (sous-entendu exhaustive, puisqu'on fait des maths) des éléments qui composent l'ensemble, par exemple $E = \{1, 5, \pi\}$. Un ensemble défini de façon descriptive est toujours le forme $\{f(x),\ x \in E\}$. C'est la liste des objets de la forme $f(x)$ où x se promène dans ensemble donné connu. Par exemple $F = \{\cos(k\pi),\ k \in \mathbb{N}\}$.
- On peut définir aussi un ensemble *en compréhension* en donnant les propriétés que doivent vérifier les éléments de cet ensemble. Une description en compréhension est donc une façon indirecte de décrire l'ensemble. On ne donne pas les éléments directement et il est nécessaire de faire un effort de compréhension sur les conditions pour pouvoir y appartenir. Un ensemble en compréhension est toujours de la forme $\{x \in E \text{ t.q. } P(x)\}$ où $P(x)$ est une propriété. Par exemple, $\{k \in \mathbb{Z},\ k\cos(k\pi/2) > 0\}$. On ne donne pas explicitement la liste des éléments qui le composent. Mais compte tenu de la propriété que doivent vérifier les éléments de cet ensemble, on peut déterminer précisément si un élément est dedans ou non. Dans l'exemple, $0, 1, -1$ ne sont pas dedans mais 4 et -2 le sont.

Exemple 1.1 :
Parmi les ensembles les plus courants, on trouve :

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, les ensembles usuels de nombres. Ces ensembles sont particuliers. Ils sont tellement courants qu'on leur a donné des noms. On les reverra plus tard.
- $\{2k \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}$ décrit l'ensemble des éléments de la forme $2k$ où k est dans $\mathbb{Z}$
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ décrit les nombres premiers inférieurs à 20.

Remarque (Prononciation) :
Dans la notation d'un ensemble (en compréhension ou descriptive), la première accolade se lit "ensemble". La dernière servant de délimiteur pour terminer la phrase. La notation mathématique "$E = \{\cos(k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$" se lit "$E$ est l'ensemble des $\cos(k\pi)$ pour k dans $\mathbb{Z}$".

Remarque :
Dans un ensemble, on ne répète jamais un élément. Ne pas confondre la notion abstraite d'un ensemble qui ne fait que décrire des éléments, mais qui s'affranchit des contraintes physiques de savoir en quelle proportion ces éléments apparaissent. Un ensemble est la collection des objets qui sont à notre disposition. C'est la liste des objets considérés, sans se préoccuper du nombre de fois où ils apparaissent.

Par conséquent, un ensemble ne peut pas se "vider". C'est la liste abstraite des éléments qui le composent. La liste reste toujours la même. On pourra donc piocher un même élément dans un ensemble autant de fois que l'on veut. Une fois qu'un élément est disponible, il est disponible.

Dans la description d'un ensemble, les éléments n'apparaissent qu'une seule fois mais sont disponibles infiniment. Autrement dit, l'ensemble $\{1, 1, 2, 2, 3\}$ est constitué d'exactement les mêmes éléments que l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Il n'y a pas plus d'éléments dans le premier que dans le deuxième. Ce sont exactement les mêmes ensembles. Autrement dit, $\{1, 1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Et dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, on peut extraire l'élément 1 autant de fois que l'on veut. Une fois qu'il est dedans, il reste toujours dedans. On ne peut "enlever" un élément d'un ensemble, sinon on changerais la définition de l'ensemble. C'est la liste des éléments dont on dispose pour travailler.

Ne pas confondre un ensemble mathématique avec une urne. En piochant une boule d'une urne, si on ne la remet pas, elle n'y est plus. Pas dans un ensemble. Ce sont nos éléments de travail.

Définition 1.2 (Élément d'un ensemble, appartenance) :
Si x est un élément de l'ensemble E (*i.e.* si x fait partie de la collection E), on dit que x *appartient à* E et on note $x \in E$.

Remarque :
C'est une tautologie, mais on peut toujours écrire $E = \{x \in E\}$, *i.e.* E est l'ensemble des éléments qui le composent. Ce qui peut avoir son utilité (cf dénombrement).

Définition 1.3 (Inclusion, Sous-ensemble, partie) :
Soit E et F deux ensembles. On définit *l'inclusion* de E dans F, notée $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F, *i.e.*

$$E \subset F \iff (\forall x \in E,\ x \in F).$$

Dans ce cas, on dit que E est un *sous-ensemble* de F, ou une *partie* de F.

Remarque :
Si E est un ensemble, on a évidement toujours $E \subset E$. Tout ensemble est une sous-partie de lui même.

Remarque :
On a bien sûr des versions négatives :

- si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$
- si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$

!!! ATTENTION !!!

Il faut bien comprendre correctement la définition de $F \not\subset E$. Attention à l'intuition (et aux raisonnements Shadok). Pour avoir la définition, il faut revenir à la logique. C'est la négation d'une proposition logique. Donc :

$$F \not\subset E \iff \exists x \in F, \quad \text{t.q. } x \notin E.$$

Exemple 1.2 :
On a clairement $\{\cos, \sin, \tan\} \not\subset \mathbb{C}$. C'est assez évident compte tenu du fait que les objets n'ont pas la même nature, n'ont pas le même type. Mais on a également $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ alors que $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$ et bien que ce soient tous les deux des ensembles de nombres (donc les objets ont la même nature).

Remarque :
On notera la caractérisation :

$$x \in E \iff \{x\} \subset E$$

Remarque (Notation) :
On note parfois par $\subseteq$ au lieu de $\subset$. Les différences viennent des vieilles querelles avec les anglosaxons. J'utiliserais dans ce cours préférentiellement la notation $\subset$. La notation $\subseteq$ sera utilisé pour appuyer le fait (et pour ne pas l'oublier) que les deux ensembles en questions peuvent être égaux (donc j'utiliserais $\subseteq$ à des fins pédagogiques, au sens où il est important de bien faire noter au lecteur que l'égalité ensembliste est possible et que c'est important).

Définition 1.4 (Sous-ensemble stricte) :
Si E et F sont deux ensembles avec $F \subset E$, on notera $F \subsetneq E$ pour dire que F est un *sous-ensemble stricte* de E, c'est-à-dire une partie de E mais différente de E. En d'autres termes, on a

$$F \subsetneq E \iff \begin{cases} F \subset E \\ F \neq E \end{cases}$$

Définition-Propriété 1.5 (Égalité entre ensemble) :
Soit E et F deux ensembles. On dira que E *et* F *sont égaux*, et notera $E = F$ si les deux ensembles sont composés exactement des mêmes éléments, *i.e.*

$$E = F \iff \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$$

Démonstration :
Si $E = F$, alors en particulier alors on a en particulier $E = F \subset E$ et aussi $F = E \subset F$.

Réciproquement, si $E \subset F$ et $F \subset E$. Alors tous les éléments de E sont des éléments de F et vice-versa. Donc ils ont exactement les mêmes éléments. En effet, si l'on suppose qu'ils n'ont pas les mêmes éléments, alors, sans perte de généralités, on peut suppose $\exists x \in E$ avec $x \notin F$. Mais dans ce cas, par définition, $E \not\subset F$. Ce qui est absurde. Donc ils ont les mêmes éléments, et donc ils sont égaux. $\square$

Définition 1.6 (Ensemble vide) :
On appelle *ensemble vide* l'ensemble "$\{\}$" composé d'aucun élément. Il est noté $\emptyset$.

Remarque :
$\emptyset$ est le seul ensemble qui soit contenu dans tous les autres : si E est un ensemble quelconque (y compris $\emptyset$ lui-même), on a $\emptyset \subset E$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ $\{\emptyset\}$ n'est PAS l'ensemble vide. C'est l'ensemble qui contient l'ensemble vide. Il y a un élément et c'est $\emptyset$. Mais donc il n'est pas vide puisqu'il contient quelque chose (l'ensemble vide).

Ne pas confondre l'ensemble vide et le vide ! Ce n'est pas la même chose ! L'ensemble vide EST vide : il ne contient rien. Mais l'ensemble vide n'est pas LE vide : c'est un objet à part entière.

Remarque :
Attention à la nature des éléments d'un ensemble. Dans la définition, on a rien imposé sur la nature des éléments d'un ensemble. Être élément d'un ensemble est une relation entre deux objets (un élément et un ensemble). Ça ne dit rien sur la nature de l'objet. Un ensemble peut contenir des ensembles. Qui à leur tour, peuvent contenir des éléments qui peuvent eux aussi être des ensemble. Par exemple $\{[1,2[,\ ]0,2[,\ \{0,1,2\},\ \emptyset\}$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles dont les éléments sont des réels.

On peut même mélanger les natures des objets d'un ensemble : $\{\{1\},\ \pi,\ x \mapsto \cos(x)\}$ qui contient un ensemble, un réel et une application. Il y a peu de chance pour que cet ensemble ait un intérêt palpitant, mais on peut le faire.

Exemple 1.3 :
Soit $E = \{a,b,c\}$ avec des éléments deux à deux distincts. Les assertions suivantes peuvent-elles avoir un sens (indépendamment de leur véracité) ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\{\emptyset\} \subset E$.

Proposition 1.1 (La relation d'inclusion est une relation d'ordre) :
Soit A, B, C trois ensembles. Alors

(i) On a toujours $A \subset A$ [*Réflexivité*]

(ii) Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$ [*Anti-symétrie*]

(iii) Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ [*Transitivité*]

Démonstration :
Le point (i) est évident. On l'a déjà vu en remarque. Ça provient de la définition de l'inclusion. Le point (ii) est également déjà fait. C'est la définition de l'égalité entre ensemble. Qui provient elle aussi de la définition de l'inclusion.

Supposons $A \subset B$ et $B \subset C$. On veut montrer $A \subset C$. Donc on veut montrer que "$\forall a \in A,\ a \in C$". Soit $a \in A$. Alors, comme $A \subset B$ et par définition de l'inclusion, $a \in B$. Or $B \subset C$. Donc, de nouveau par définition de l'inclusion, $a \in C$. Donc $\forall a \in A$, $a \in C$. Et donc $A \subset C$ par définition de l'inclusion. □

Remarque :
On dira, dans quelques semaines, que $\subset$ est une relation d'ordre. Voir le chapitre *ad hoc*.

1.2 Ensemble des sous-parties

Définition 1.7 (Ensemble des sous-parties) :
Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les sous-parties de E, *i.e.*

$$\mathcal{P}(E) = \{F \subset E\}.$$

Exemple 1.4 :
Quelque soit l'objet a :

- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\Big\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Remarque :
Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc les sous-ensembles de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc eux-mêmes des ensembles. Et par définition de $\mathcal{P}(E)$ on a : $F \subset E \iff F \in \mathcal{P}(E)$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre "appartenance" et "inclusion" : $\{1\} \subset \mathbb{R}$ mais $\{1\} \notin \mathbb{R}$. Et aussi $1 \in \mathbb{R}$ mais $1 \not\subset \mathbb{R}$.

Remarque :
Comme pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$, on a donc toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.5 :
Soit $E = \{a, b\}$ avec $a \neq b$. Donner tous les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Et que vaut $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?

Proposition 1.2 (Caractérisation d'une inclusion par les sous-parties [✓]) :
Soit A et B deux ensembles. Alors

$$B \subset A \iff \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A).$$

En réalité, dans cette équivalence, le sens indirecte est triviale.

Démonstration :
Supposons que $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$. On a donc en particulier $B \in \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$ et donc $B \subset A$, par définition de l'inclusion.

Supposons maintenant $B \subset A$. Soit $E \in \mathcal{P}(B)$. Par définition, on a donc $E \subset B \subset A$. Donc $E \subset A$, donc $E \in \mathcal{P}(A)$. $\square$

1.3 Opérations sur les ensembles

1.3.1 Intersection

Définition 1.8 (Intersection) :
Si E et F sont deux ensembles, on note $E \cap F$ l'ensemble de tous les éléments en communs à E et F, de tous les éléments qui sont à la fois dans E et dans F. C'est *l'intersection* de E et F. Autrement dit :

$$E \cap F = \{x \in E \text{ t.q. } x \in F\} = \{x \in F \text{ t.q. } x \in E\}.$$

Exemple 1.6 :
On peut prendre comme exemple : $]-1,1] \cap]0,2] =]0,1]$, ou bien aussi $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 5\} \cap \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 < 0\} =]\sqrt{5}, 3]$. Etc.

Définition 1.9 (Ensembles disjoints) :
Soit A, B deux ensembles. Si l'on a $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont *disjoints*.

Proposition 1.3 (Propriété algébrique de l'intersection [✓]) :
Soit A, B, C trois ensembles. Alors :

(i) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
(ii) Si $A \subset B$ et $A \subset C$, alors $A \subset B \cap C$
(iii) $A \cap A = A$
(iv) Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$.
(v) $A \cap \emptyset = \emptyset$ [*Élément absorbant*]
(vi) $A \cap B = B \cap A$ [*Commutativité*]
(vii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ [*Associativité*]

Démonstration :

(i) Par définition, $A \cap B = \{a \in A, \text{ t.q. } a \in B\} \subset A$. De même, par définition de l'intersection et de l'inclusion, $A \cap B \subset B$.
(ii) Soit $a \in A$. Alors $a \in B$ et $a \in C$ par définition de l'inclusion. Donc, par définition, $a \in B \cap C$. Donc $A \subset B \cap C$.

(iii) On vient de montrer $A \cap A \subset A$. Et $A \subset A$. Donc $A \subset A \cap A$ d'après la question précédente. D'où, par définition de l'égalité entre ensemble, $A = A \cap A$.

(iv) On sait déjà que $A \cap B \subset A$. Mais on a aussi $A \subset B$ et $A \subset A$. Donc $A \subset A \cap B$. D'où l'égalité.

(v) On a toujours $A \cap \emptyset \subset \emptyset$. Mais par ailleurs, $\emptyset \subset A \cap \emptyset$ car $A \cap \emptyset$ est un ensemble. D'où l'égalité.

(vi) L'égalité provient de commutativité de la conjonction vu dans le chapitre de logique.

(vii) L'associativité de l'intersection provient de l'associativité de la conjonction de logique.

□

Exemple 1.7 :
Déterminer une expression plus simple de

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

1.3.2 Réunion

Définition 1.10 (Réunion) :
Si E et F sont deux ensembles, la *réunion* de E et F, noté $E \cup F$, est l'ensemble composé de tous les éléments de E et F réunis. On a donc $E \cup F = \{x \in E \text{ ou } x \in F\}$.

Exemple 1.8 :

- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \cup \{x, y, z\} = \{a, b, x, y, z\}$

Remarque :
Si A et B sont des sous-ensembles disjoints d'un ensemble E, on notera parfois $A \sqcup B$ ou encore $A \uplus B$ pour parler de la réunion disjointe de A et B, c'est-à-dire pour insister sur le fait que A et B sont des ensembles disjoints. Cependant, ces deux notations ne sont pas canoniques. J'utiliserais la notation $\uplus$, mais c'est un goût personnel. D'autres pourront utiliser une autre notation.

On peut aussi écrire

$$E = \{x \in E\} = \bigcup_{x \in E}^{\cdot} \{x\}.$$

Ce n'est pas palpitant a priori, mais ça peut aider dans certaines situations (notamment en dénombrement).

Proposition 1.4 (Propriété algébrique de la réunion [✓]) :
Soit A, B, C des ensembles. On a les relations :

(i) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

(ii) Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors $A \cup B \subset C$

(iii) $A \cup A = A$

(iv) $A \subset B \implies A \cup B = B$

(v) $A \cup \emptyset = A$ [*Élément neutre*]

(vi) $A \cup B = B \cup A$ [*Commutativité*]

(vii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ [*Associativité*]

Démonstration :
La démonstration est assez similaire au cas de l'intersection. Laissée en exercice. □

Exemple 1.9 :
Déterminer une expression simple de

$$E = \bigcup_{a \in]0,1[} [-a, a]$$

Proposition 1.5 (Propriété de l'intersection par rapport à la réunion [✓]) :
Soit A, B, C trois ensembles.

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [*Distributivité de $\cap$ sur $\cup$*]
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [*Distributivité de $\cup$ sur $\cap$*]

Démonstration :
Là encore, on utilise la distributivité de la conjonction sur la disjonction et de la disjonction sur la

conjonction.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ ou } x \in C \end{cases} && \text{def } \cap \text{ et } \cup \\
&\iff \begin{cases} x \in A \text{ et } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } x \in C \end{cases} && \begin{array}{c}\text{distributivité des conjonctions} \\ \text{sur les disjonctions}\end{array} \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && \text{def } \cap \text{ et } \cup
\end{aligned}$$

Le dernier point se fait de façon très similaire (exercice). $\square$

Remarque :
On pourrait rajouter de nombreuses propriétés. La liste n'est pas du tout exhaustive. Certains points intéressants sont dans le TD. Il faudra pouvoir établir les propriétés dont on a besoin en fonction de la situation et les démontrer.

Le but est de savoir comment manipuler les ensembles pour pouvoir ensuite se sortir de toutes les situations délicates.

Exemple 1.10 :
Déterminer une expression plus simple de

$$E = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{2^p}, n+1 \right[\qquad F = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{2^p}, n+1 \right[$$

Définition 1.11 (Partition d'un ensemble) :
Soit E et I des ensembles. On appelle *partition* de E indexée par I, une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-partie de E telle que :

1. $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
2. $\forall i, j \in I$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Remarque :
L'ensemble I des index peut être fini ou infini. En général, on utilise des partitions finies, mais ce n'est pas obligatoire. Et ça dépend de l'ensemble E.

Exemple 1.11 :
La famille $(]n, n+1])_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$. Bien sûr, $(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ est également une partition de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas très intéressant.

$(\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } n \leq |z| < n+1\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{C}$ (en couronne concentrique). En revanche $(\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| \leq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une partition de $\mathbb{C}$.

1.3.3 Différence

Définition 1.12 (Différence) :
Si A et B sont deux ensembles (quelconques, par forcément inclus dans l'autre, ni même dans le même ensemble), on notera $B \setminus A$ (B privé de A) l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A, *i.e.*

$$B \setminus A = \{x \in B \text{ t.q. } x \notin A\}.$$

Cette définition a toujours un sens. Quelque soit les ensembles A et B que l'on considère. On peut toujours considérer les éléments de B qui ne sont pas dans A. Y compris si A et B n'ont pas les mêmes types d'éléments.

Exemple 1.12 :
On prend $A = [0, 1[$, $B =]-1, 0]$, $C = [-1, 1]$ et $D = \mathbb{R}$. Déterminer $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $D \setminus A$, $A \setminus D$.

Si $B \setminus A$ a toujours un sens dès que A et B sont des ensembles, ce n'est pas pour autant toujours intéressant. $B \setminus A$ aura un intérêt à partir du moment où $B \cap A \neq \emptyset$.

Exemple 1.13 :
Si $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = f(1)\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}(z)^2 - \mathfrak{Im}(z) \leq \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)\}$, alors $B \setminus A = B$.

Remarque :
Attention à la terminologie ! On parle de différence, mais il n'y a pas de lien avec les opérations entre nombres ! Ce n'est le contraire d'une addition. La terminologie n'est d'ailleurs pas très heureuse. Et vous noterez que ce n'est pas celle qui est utilisé dans un cas pratique. Le terme de différence est utilisé seulement pour parler du principe général. On fait un amalgame ici entre le vocabulaire scientifique et son approximation dans le langage quotidien (et donc faux).

Définition 1.13 (Complémentaire) :
Soient A et B deux ensembles avec $A \subset B$. Le *complémentaire de A dans B* est le sous-ensemble de B composé de tous les éléments de B qui ne sont pas dans A. Il est noté $\overline{A}$ ou $\complement_B^A$ et correspond donc aussi à $B \setminus A$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Le complémentaire d'un ensemble se fait TOUJOURS relativement à un autre. La notation $\overline{A}$ est ambiguë à ce titre puisqu'il n'est pas précisé par rapport à quel ensemble on regarde le complémentaire. À n'utiliser que lorsque l'espace ambiant est très clairement identifié. Préférer les deux autres notations.

Exemple 1.14 :

- $\{a, b, c\} \setminus \{b\} = \{a, c\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-$

Proposition 1.6 (La complémentarité est une involution) :
Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Démonstration :
Soit $x \in E$. En reprenant la définition, on a

$$x \in \overline{\overline{A}} \iff x \notin \overline{A} \iff x \in A$$

car $x \in \overline{A} \iff x \notin A$, et par contraposition. □

Attention au passage au complémentaire. Ce n'est pas aussi naturel qu'il y paraît. On écrit facilement des bêtises.

Exemple 1.15 :
Pour les ensembles suivantes, donner leurs complémentaires dans $\mathbb{R}$ et donner les relations ($\subset$ ou $\supset$) qui relient ces ensembles. $A = \mathbb{R}$, $B = \{-1, 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}$, et $D =]-1, 1[$.

Proposition 1.7 (Partition d'un ensemble à l'aide de la complémentarité) :
Soit E un ensemble et $A \subset E$. Alors

$$E = A \mathbin{\dot\cup} \overline{A}.$$

Démonstration :
On a $A \subset E$ et $\overline{A} = E \setminus A \subset E$ par définition. Donc $A \cup \overline{A} \subset E$.

Si $x \in E$. Alors soit $x \in A$, soit $x \notin A$ (principe du tiers exclu). Donc $x \in A$ ou $x \in \overline{A}$, par définition du complémentaire. Donc $x \in A \cup \overline{A}$. D'où l'égalité. □

Proposition 1.8 (Complémentaire et opérations ensemblistes) :
Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$. Alors on a les relations :

1. $B \setminus A = B \cap \overline{A}$
2. $A \setminus A = \emptyset$
3. $A \setminus \emptyset = A$
4. Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.
5. $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$
6. Si $A \subset B$, alors $(B \setminus A) \cup A = B$

Démonstration :
C'est évident avec la définition de $B \setminus A$ et les propriétés de l'intersection et de la réunion. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention aux hypothèses ! Par exemple, avec $A = [0, 1]$, $B = [-1, 0]$, on a $(B \setminus A) \cup A = [-1, 1] \neq B$.

Exemple 1.16 :
Dans chacun des cas suivants, décrire les sous-ensembles $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ où A et B sont des ensembles de E.

1. $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$
2. E et A comme au dessus, $B = \mathbb{Z}$
3. $E = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}(z) < 1\}$

Remarque :
On peut définir la différence symétrique (qu'il est bon de connaître) par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proposition 1.9 (Complémentaire d'une réunion, d'une intersection) :
Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Démonstration :

1. Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Si $x \in \overline{A}$, alors $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, par définition de la réunion. Supposons $x \notin \overline{A}$. Donc $x \in \overline{\overline{A}}$ Donc $x \in A$. Par ailleurs, par principe du tiers exclu, on a $x \in B$ ou $x \notin B$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$. Or $x \in \overline{A \cap B}$. Donc $x \in (A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset$ ☠. Donc $x \notin B$. Donc $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Inversement, soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Si $x \in (A \cap B)$, alors en particulier $x \in A$. Donc $x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap A = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{B} \cap A) = \overline{B} \cap A$. Mais $x \in B$ également par définition de l'intersection. Donc $x \in (\overline{B} \cap A) \cap B = (\overline{B} \cap B) \cap A = \emptyset$ ☠. Donc $x \notin (A \cap B)$, *i.e.* $x \in \overline{A \cap B}$. D'où l'égalité.
2. On procède de la manière pour l'autre point (exercice).

□

1.3.4 Produit cartésien

Définition 1.14 (Produit cartésien de 2 ensembles) :
Soit E et F deux ensembles non vides. On appelle *produit cartésien* de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples formés par un élément de E suivi d'un élément de F :

$$E \times F = \{(e, f), e \in E, f \in F\}.$$

Exemple 1.17 :
$\{1, 2, 3\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$.

Définition 1.15 (Produit cartésien de n ensembles) :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles non vides. Le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est définit

comme l'ensemble des n-uplets où l'élément en i-ème position est un élément de l'ensemble E_i :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n), e_i \in E_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Exemple 1.18 :

- $\{a\} \times \{b\} \times \{c\} = \{(a, b, c)\}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b, c), a, b, c \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(a + ib, c, n), a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque :
Dans le cas où tous les ensemble E_i sont identiques, on notera alors $E_1 \times \cdots \times E_1 = {E_1}^n$.

Définition 1.16 (Égalité dans un produit cartésien) :
Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$, on a alors $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ si et seulement si il y a égalité coordonnées par coordonnées, *i.e.* ssi $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 1.10 :
Soit E, F, G, H trois ensembles. On a

(i) $E \times F = \emptyset \iff E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$

(ii) $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$

(iii) $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

(iv) $E \times F = \biguplus_{x \in E} (\{x\} \times F) = \biguplus_{y \in F} (E \times \{y\}) = \biguplus_{\substack{x \in E \\ y \in F}} \{x\} \times \{y\}$

Démonstration :

(i) Si E ou F est vide, alors $E \times F$ serait composé, si non vide, des couples dont l'une des coordonnées est vide, ce qui n'est pas possible, donc il n'y a pas de couples dans $E \times F$ et donc $E \times F = \emptyset$.

Réciproquement, si $E \times F = \emptyset$ et que l'on suppose que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$, alors $\exists x \in E$ et $\exists y \in F$ et donc $(x, y) \in E \times F$, d'où ☠ et donc E ou F est vide.

(ii) Soit $(x,y) \in E \times (F \cup G)$. Alors $x \in E$ et $y \in F \cup G$. Si $y \in F$, alors $(x,y) \in E \times F \subset (E \times F) \cup (E \times G)$ et si $y \in G$, alors $(x,y) \in E \times G \subset (E \times F) \cup (E \times G)$.

Inversement, si $(x,y) \in (E \times F) \cup (E \times G)$. Alors soit $(x,y) \in E \times F$, soit $(x,y) \in E \times G$. Dans les des cas, $y \in F \cup G$ et donc $(x,y) \in E \times (F \cup G)$.

(iii) On a

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in (E \times F) \cap (G \times H) \\
\iff & \begin{cases} (x,y) \in E \times F \\ (x,y) \in G \times H \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \in E \text{ et } y \in F \\ x \in G \text{ et } y \in F \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \in E \cap G \\ y \in F \cap H \end{cases} \\
\iff & (x,y) \in (E \cap G) \times (F \cap H)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée.

(iv) On a d'abord, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, $\{(x,y)\} = \{x\} \times \{y\}$ par définition du produit cartésien. Donc

$$\begin{aligned}
E \times F &= \dot{\bigcup_{(x,y) \in E \times F}} \{(x,y)\} \\
&= \dot{\bigcup_{x \in E, y \in F}} \{x\} \times \{y\} \\
&= \dot{\bigcup_{x \in E}} \dot{\bigcup_{y \in F}} \{x\} \times \{y\} \\
&= \dot{\bigcup_{x \in E}} \{x\} \times \left(\dot{\bigcup_{y \in F}} \{y\} \right) \\
&= \dot{\bigcup_{x \in E}} \{x\} \times F
\end{aligned}$$

et on a aussi l'autre égalité en intervertissant les deux réunions à la 3ème ligne.

□

2 Applications

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Application de E dans F) :
Soient E et F deux ensembles.

Une *application f de E vers F* est un procédé, une relation entre les éléments de E et certains éléments de F. Une application de E dans F est *bien définie* si, à tout élément x de E, est associé, par l'application f, un unique élément de F noté $f(x)$, *i.e.* :

$$f \text{ application de } E \text{ dans } F \iff \forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ y = f(x).$$

L'ensemble E est appelé *espace de départ* pour f et l'ensemble F est *l'espace d'arrivée* de f.

On notera alors

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

qui se lit "f est l'application qui va de E dans F et qui à x associe $f(x)$".

Remarque :
On peut noter aussi $f : E \to F$ ou encore $E \xrightarrow{f} F$. Dans ce cas, on considère l'application f sans son effet sur les éléments. C'est une application abstraite.

Remarque :
À strictement parlé, une application est donc définie par trois choses : son ensemble d'arrivée, son ensemble de départ et ce qu'elle fait aux éléments de départ (son expression). Changer un seul de ces trois points, change l'application qu'on considère.

Définition 2.2 (Image, Antécédent, Graphe) :
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- Si x est un élément de E, l'élément $f(x)$ de F qui lui correspond par f est appelé *image de x par f*.
- Si $y \in F$ et si $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$, alors l'élément x est *un antécédent* de y par f. Il n'y a pas, en général, unicité en ce qui concerne les antécédents. Une image donnée peut avoir plusieurs antécédents.
- Le *graphe de f* est l'ensemble de $E \times F$ correspondant aux couples d'un élément de l'espace de départ de f et son image par f :

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \in E \times F \text{ t.q. } y = f(x)\} = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \subset E \times F.$$

Définition 2.3 (Ensembles $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F) :
Soit E et F deux ensembles non vides.
L'ensemble des applications de E vers F sera noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.

Exemple 2.1 :
Soit $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{a,b,c\}$, on définit une application f de E vers F par $f(1) = a$, $f(2) = a$ et $f(3) = c$. À chaque éléments de l'ensemble de départ est associé clairement un élément de l'ensemble d'arrivée. a est l'image de 1 et 2 par f, et c est l'image de 3. Mais 3 est l'antécédent de c, 1 est *un* antécédent de a et 2 aussi. Et enfin on a $\mathrm{Gr}(f) = \{(1,a),(2,a),(3,c)\} \subsetneq E \times F$.

Définition 2.4 (Famille d'éléments) :
Soit E et I deux ensembles. Une *famille d'éléments de E indexée par I* est un élément de E^I pour lequel, on identifie application et images prises par l'application. Autrement dit, $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est une famille d'éléments de E et l'on ne considère que les valeurs prises par l'application en oubliant le fait que c'est une application.

Exemple 2.2 :
Si $I = \mathbb{N}$, on obtient une suite. Si I possède 2 éléments, on obtient un couple dont les deux éléments sont indexés par les éléments de I. Par exemple, $(x_1, x_i) \in \mathbb{R}^{\{1,i\}}$ est un couple et c'est une famille de deux éléments de $\mathbb{R}$ indexé par $\{1,i\}$.

Remarque :
Dans une famille d'éléments, il peut très bien y avoir plusieurs éléments qui ont la même valeur. Mais l'ordre dans lequel on donne les valeurs est important ("ordre" qui est imposé par les indices).

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre famille d'éléments et ensemble des valeurs prises par la famille. Par exemple, si on pose $x_1 = x_3 = y_1 = y_2 = 1$ et $x_2 = y_3 = 2$, alors les deux familles $(x_i)_{1\leq i\leq 3}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq 3}$ ne sont pas les mêmes car $x_2 \neq y_2$ mais elles prennent globalement les mêmes valeurs, *i.e.* $\{x_i,\ 1 \leq i \leq 3\} = \{y_i,\ 1 \leq i \leq 3\}$.

Définition 2.5 (Égalité entre application) :
Soit E_1, E_2, F_1, F_2 des ensembles et $f_1 \in \mathcal{F}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{F}(E_2, F_2)$.
On dit que f_1 et f_2 *sont égales* si elles le sont sur tous les éléments aux départs, *i.e.*

$$f_1 = f_2 \iff \begin{cases} E_1 = E_2 \\ F_1 = F_2 \\ \forall x \in E_1 = E_2,\ f_1(x) = f_2(x). \end{cases}$$

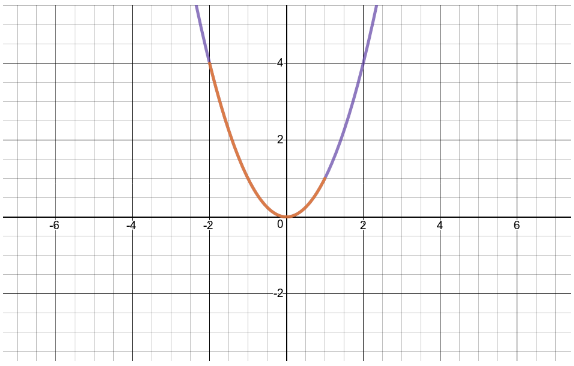
Définition 2.6 (Restriction, prolongement) :
Soit E, F, A et B des ensembles tels que $A \subset E \subset B$ et $f : E \to F$.

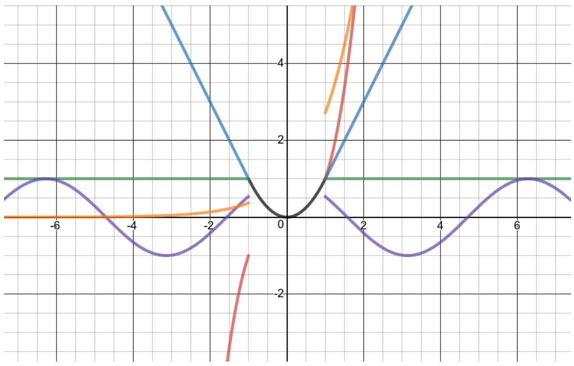
- On appelle *restriction de f à A*, noté $f|_A$, l'application

$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

- On appelle *prolongement de f à B*, toute application $g : B \to F$ telle que $g|_E = f$, *i.e.* telle que $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.

En d'autres termes, le prolongement fait ce qu'il veut en dehors de l'espace de départ initial et doit coïncider avec la fonction initiale sur E.





Remarque :
Normalement, à chaque fois que l'on étend ou restreint une fonction, on devrait lui donner un nouveau nom. Une fonction est définie par 3 éléments : le domaine de départ, l'espace d'arrivée et ce qu'elle fait aux éléments de l'espace de départ (la “formule”). Donc en changeant l'un de ces éléments, on créé une nouvelle fonction et donc on devrait lui donner un nouveau nom. Mais par abus, par commodité, on garde souvent le même nom pour une fonction et sa restriction.

Remarque :
Naturellement, lorsqu'on restreint une fonction, la fonction initiale est donc un prolongement de la fonction restreinte. Et lorsqu'on étend une fonction, la fonction initiale est donc la restriction (à l'ensemble de départ) de tous les prolongements. C'est d'ailleurs comme ça qu'est défini un prolongement.

Le prolongement est, en quelques sortes, le “contraire” de l'extension, et vice-versa.

Définition 2.7 (Image directe, Image réciproque, Sous-ensemble stable, Image) :
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On appelle *image directe de A par f* l'ensemble $\widehat{f}(A)$ de toutes les images des éléments de A par f, *i.e.*

$$\widehat{f}(A) = \{f(a), a \in A\} = \{y \in F, \exists a \in A, y = f(a)\} \subset F.$$

- On appelle *image réciproque de B par f*, ou *pré-image* de B, l'ensemble $\widehat{f}^{-1}(B)$ de tous les antécédents par f des éléments de B, *i.e.*

$$\widehat{f}^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E.$$

- Si $E = F$, A est dit *stable par f* si $\widehat{f}(A)$, *i.e.* si $\forall a \in A,\ f(a) \in A$.
- On appelle *image de la fonction f* l'image de E par f, *i.e.* $\widehat{f}(E)$ (on le note parfois aussi $\mathrm{Im}(f)$)

!!! ATTENTION !!!

⚠ Dans le cas de l'image réciproque, la notation f^{-1} est une notation. Elle ne signifie en rien que l'application f a un inverse. On ne peut pas utiliser cette notation sans plus de précautions pour des éléments. On ne peut donc pas écrire $f^{-1}(x)$ en général. Mais $\widehat{f}^{-1}(\{x\})$ a toujours un sens.

Il ne faut pas confondre non plus $f^{-1}(x)$ et $f(x)^{-1}$. Qui peuvent, ou non, avoir un sens, indépendamment l'un de l'autre !

Exemple 2.3 :
f désigne la fonction $\cos$ définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\widehat{f}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f}^{-1}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f}([0,\pi/2]), \quad \widehat{f}^{-1}(\{1\}), \quad \widehat{f}^{-1}(\widehat{f}([0,\pi]))$$

Même question pour la fonction carré.

Remarque :
La notation $\widehat{f}(A)$ n'a rien d'officielle. Ces notations sont introduites intentionnellement par moi à des fins pédagogiques. Normalement, on les note $f(A)$ et $f^{-1}(A)$. J'ai changé ici les notations pour essayer d'aider à bien faire la différence entre $f(a)$ et $f(A)$, entre l'image d'un élément (qui a, ou pas, un sens) et l'image directe d'un ensemble (qui a toujours un sens). Je vais essayer de revenir à des notations plus standards (*i.e.* $f(A)$) au fur et à mesure.

Proposition 2.1 (Premières propriétés basiques de l'image directe) :
Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ et $A \subset E$.

(i) Si $A \neq \emptyset$, alors $f(A) \neq \emptyset$.

(ii) $\forall a \in E$, $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.

Démonstration :
Si $A \neq \emptyset$, alors $\exists a_0 \in A$. Alors $f(a_0) \in \widehat{f}(A)$ par définition et donc $\widehat{f}(A) \neq \emptyset$

Soit $a \in E$. On a $a \in \{a\}$ trivialement, donc $f(a) \in \widehat{f}(\{a\})$ par définition et donc $\{f(a)\} \subset \widehat{f}(\{a\})$. Inversement, si $x \in \widehat{f}(\{a\})$, alors, par définition, $\exists y \in \{a\}$ tel que $x = f(y)$. Et $y \in \{a\} \iff y = a$. Donc $x = f(a)$. Et donc $\widehat{f}(\{a\})$ ne contient que $f(a)$ d'où $\widehat{f}(\{a\}) = \{f(a)\}$. $\square$

Remarque :
Le deuxième point n'est valable QUE pour un singleton. C'est faux dès que l'on prend un ensemble contenant plus d'éléments.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Si $f(x) \in \widehat{f}(A)$, on ne peut rien conclure :

$$f(x) \in \widehat{f}(A) \not\Rightarrow x \in A$$

En effet : avec $f : x \mapsto x^2$, on a $f(-1) \in \widehat{f}(\mathbb{R}_+)$ et pourtant $-1 \notin \mathbb{R}_+$! !

Proposition 2.2 (Propriété de l'image directe et réciproque avec la réunion et intersection[✓]) :
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et soit $X, Y \in \mathcal{P}(F)$. Alors :

(i) $\widehat{f}(A \cap B) \subset \widehat{f}(A) \cap \widehat{f}(B)$ et trouver un contre exemple pour l'inclusion inverse

(ii) $\widehat{f}(A \cup B) = \widehat{f}(A) \cup \widehat{f}(B)$

(iii) $\widehat{f}^{-1}(X \cap Y) = \widehat{f}^{-1}(X) \cap \widehat{f}^{-1}(Y)$

(iv) $\widehat{f}^{-1}(X \cup Y) = \widehat{f}^{-1}(X) \cup \widehat{f}^{-1}(Y)$

(v) $A \subset \widehat{f}^{-1}(\widehat{f}(A))$ et trouver un contre-exemple à l'inclusion contraire

(vi) $\widehat{f}(\widehat{f}^{-1}(X)) \subset X$ et trouver un contre-exemple à l'inclusion contraire

(vii) Si $A \subset B$, alors $\widehat{f}(A) \subset \widehat{f}(B)$ et trouver un contre-exemple à la réciproque.

(viii) Si $X \subset Y$, alors $\widehat{f}^{-1}(X) \subset \widehat{f}^{-1}(Y)$ et trouver un contre-exemple à la réciproque.

(ix) $\widehat{f}(E \setminus A) \supset \widehat{f}(E) \setminus \widehat{f}(A)$ et trouver un contre-exemple à la réciproque.

(x) $\widehat{f}^{-1}(\overline{X}) = \overline{\widehat{f}^{-1}(X)}$

Démonstration :
Exercice classique. A savoir faire. □

Remarque :
Cette propriété est un exercice à connaître et à savoir utilisé. Il vaut mieux le redémontrer en 30s à chaque fois qu'on en a besoin que de l'apprendre par cœur. Il faut avoir une idée de chaque proposition et la redémontrer quand on a besoin. C'est l'objet de nombreuses questions de cours, d'ailleurs.

Définition 2.8 (Composée, Application identité) :
Soit E, F, G trois ensembles.

- Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. *L'application composée* de f et de g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G tel que

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

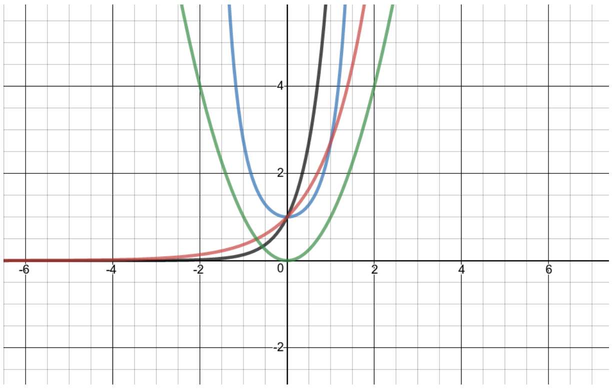
- On appelle *application identité de l'ensemble* E, notée Id_E, l'application

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

!!! ATTENTION !!!

La composition n'est pas commutative ! Attention à l'ordre dans lequel on compose les applications et l'ordre dans lequel elles sont notés !

Exemple 2.4 :
On considère les applications $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto e^x$. On a donc les composées : $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g \circ f(x) = e^{x^2}$ et $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f \circ g(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$.



Remarque :
On notera que l'ordre dans lequel on note les applications dans une composition est l'inverse (au sens lexicographique) de celui dans lequel elles s'appliquent. Autrement dit, dans $f \circ g(x)$, on applique d'abord g, puis f en second, mais on note d'abord f et puis g. Il faut donc penser "à rebours" lors des compositions. Ça peut être, des fois, un peu perturbant. Mais c'est plus logique si on place du point de vue de l'élément x auquel on applique la composée.

Proposition 2.3 (Propriété de la loi $\circ$) :
Soit E, F, G, H des ensembles. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$.
Alors on a :

- $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$ [*Associativité*]

Démonstration :
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} f \circ \mathrm{Id}_E(x) &= f(\mathrm{Id}_E(x)) \\ &= f(x) \\ &= \mathrm{Id}_F(f(x)) \\ &= \mathrm{Id}_F \circ f(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h\Big(g(f(x))\Big) \\ &= h\Big((g \circ f)(x)\Big) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x) \end{aligned}$$

□

2.2 Injections, Surjections, Bijections

On va prendre ici une définition qui n'est pas très agréable et qui n'est pas celle qu'on utilise habituellement. La raison est pédagogique. Le but étant de fournir d'abord une définition plus intuitive puis dans une version plus formelle (et donc plus utilisable, plus pratique) et de commencer à manipuler un peu plus ces notions fondamentales.

Définition 2.9 (Injection, Surjection, Bijection, Application réciproque) :
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- On dit que f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent, *i.e.* si $\forall y \in F$, $\widehat{f}^{-1}(\{y\})$ est un singleton ou $\emptyset$.
- On dit que f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent, *i.e.* si $\forall y \in F$, $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
- On dit que f est *bijective* si tout élément de F admet un unique antécédent par f, *i.e.* si $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $f(x) = y$. L'application $F \to E$ qui associe l'unique antécédent d'un élément de F s'appelle alors *l'application réciproque de* f et est noté f^{-1}.

Remarque :
La bijectivité dit aussi que pour tout $y \in E$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ a une unique solution. Et f^{-1} est l'application qui donne la solution de cette équation.

Exemple 2.5 :

- La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est injective. En effet, si $y < 0$, $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ et si $y \geq 0$, $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) = \{\sqrt{y}\}$. Mais elle n'est pas surjective puisque -1 est dans l'espace d'arrivée et n'a pas d'antécédent.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective. En effet, $\forall y \geq 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$. Autrement dit, $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Mais elle n'est pas injective car 1 qui est dans l'espace d'arrivée a 2 antécédents.
- La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'injectivité, surjectivité et bijectivité dépend complètement de la définition de la fonction considérées. En changeant la définition de la définition, on change ses propriétés et donc, potentiellement, son injectivité ou surjectivité.

Bien entendu, on va s'amuser cette année à “étirer” des fonctions ou à les “raboter”, ce qui aura pour conséquences de modifier leurs propriétés. On pourra donc passer d'une fonction non injective à un fonction injective, ou surjective à non surjective etc.

D'une façon générale, étant donné une fonction, on peut toujours la rendre injective ou surjective. C'est toujours la surjectivité qui est le plus facile à donner.

La non-surjectivité signifie, moralement, qu'il y a "trop" d'éléments dans l'espace d'arrivée et qu'ils ne sont donc pas tous atteint, pas tous touché par la fonction. Pour rendre une fonction surjective, il suffit de réduire l'espace d'arrivée de la fonction à son image, c'est-à-dire à $f(E)$.

Pour rendre une fonction injective, c'est moins facile, moins directe. Il faut d'abord regarder tous les éléments de l'image de f qui ont plus d'un antécédents, en choisir un et enlever les autres de l'espace de départ. En d'autres termes, on ne garde qu'un seul antécédent pour chaque élément de l'image de f. Il y a donc un choix à faire, t donc plus désagréable (il faut discriminé certains antécédents, il faut ostracisé certains et c'est arbitraire, a priori).

On remarquera que c'est exactement le procédé pour étendre une fonction. Comme il faut faire un choix, ce choix est rarement (pour ne pas dire jamais) unique. D'où la notion d'UNE extension de la fonction. L'emploi de l'indéfini est très important. En revanche, dans le cas de la restriction, tout est déjà prédéterminé. Il suffit d'oublier de faire certaine chose, aucun choix à faire. Mais les objets étant déjà existants au préalable, il n'y a pas de choix à faire. En particulier, une restriction d'une fonction à un domaine donné est forcément unique. C'est donc LA restriction de la fonction au domaine considéré.

Proposition 2.4 (Caractérisation de l'injectivité, Surjectivité, Bijectivité [✓]) :
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On a alors :

(i) f est injective ssi $[\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)]$ ssi $[\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y]$

(ii) f est surjective ssi $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$ ssi $\widehat{f}(E) = F$.

(iii) f est bijective ssi f est injective et surjective ssi $\exists g : F \to E,\ g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ (et dans ce cas, $g = f^{-1}$).

(iv) Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Démonstration :

(i) D'abord, observons que la dernières propositions est la contraposée de la précédente. Il suffit donc de démontrer une seule des équivalences. Supposons que f sont injective. Soit $x, y \in E$, $x \neq y$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $f(x) = f(y) = z \in F$. Dans ce cas, $\widehat{f}^{-1}(\{f(x)\}) = \widehat{f}^{-1}((\{z\}) = \{x\}$. En effet, il n'est pas vide, puisque $f(x) = z$ et comme f est injective, c'est exactement le singleton $\{x\}$. Mais de même, on a aussi $\widehat{f}^{-1}(\{z\}) = \widehat{f}^{-1}(\{f(y)\}) = \{y\}$. Donc $\{x\} = \{y\}$ et donc $x = y$ ce qui est absurde par hypothèse.

Pour le sens indirecte, on considère $y \in F$. Si $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, il n'y a rien à faire. Supposons donc que $\widehat{f}^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Soient $x_1, x_2 \in \widehat{f}^{-1}(\{y\})$. Si $x_1 \neq x_2$ alors, par hypothèse, $y = f(x_1) \neq f(x_2) = y$, ce qui est impossible. Donc $x_1 = x_2$ et donc $\widehat{f}^{-1}(\{y\})$ ne peut contenir qu'un seul élément. C'est donc un singleton s'il n'est pas vide. Donc f est injective.

(ii) C'est une tautologie. Si ce n'est pas vide, c'est qu'il y a quelque chose ...

Le deuxième point est tout aussi triviale. Ce n'est que la définition de $\widehat{f}(E)$.

(iii) Supposons que f soit bijective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) = z$. Par bijectivité, $\exists! t \in E$, $f(t) = z$. Mais on a déjà $f(x) = z$. Donc par unicité, $t = x$. Et de même, $t = x = y$. Donc f est injective. La surjectivité est immédiate. S'il existe un unique antécédent, il y en a un au moins.

Supposons f injective et surjective. Soit $y \in F$. Par surjectivité, on sait $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. Il suffit de montrer qu'il est unique. Supposons qu'il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y$. On a donc $f(x) = f(x')$. Et l'injectivité de f nous donne donc $x = x'$. Donc l'antécédent de y est unique et donc f est bijective.

Si f est bijective, on pose $g = f^{-1}$ et alors on a bien $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ avec $g : F \to E$ par définition.

Soit $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Soit $y \in F$. On pose $x = g(y) \in E$. Et on a donc $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = y$. Donc y a un antécédent par f : c'est $g(y) = x$. Si on avait en plus $z \in E$ tel que $f(z) = y$, un autre antécédent de y par f, alors on aurait $g \circ f(x) = x = g(y) = g \circ f(z)$. Mais comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on aurait donc $x = z$. D'où l'unicité de l'antécédent, et donc f est bijective.

(iv) Il n'y a pas vraiment quoi que ce soit à démontrer. Ce n'est que l'écriture de la définition en français de la réciproque d'une application. En effet, si f est bijective, on peut considérer $f^{-1} : F \to E$ qui donne l'antécédent de chaque élément de F par f. Alors, si $y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ puisque $f^{-1}(y)$ est l'antécédent de y par f. Donc son image, par définition, est y. Et inversement, si $x \in E$, on considère $f^{-1} \circ f(x)) = f^{-1}(f(x))$ est l'antécédent de $f(x)$. Mais c'est x, par définition de $f(x)$ et d'un antécédent.

$\square$

Remarque :
Comme nous avons une caractérisation, c'est donc une reformulation de la définition. Et en tant que telle, on aurait pu inverser les choses et prendre cette caractérisation comme définition pour montrer que la définition est équivalente. C'est d'ailleurs le point de vue le plus répandu et le meilleur à retenir. Il vaut mieux utiliser cette caractérisation comme définition en pratique.

Exemple 2.6 :
Parmi les applications suivantes, dire celles qui sont injectives, surjectives, bijectives et justifier. Dans le cas d'applications bijectives, donner leur réciproques.

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & |x| \end{array} \qquad c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}$$

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{2\} \\ z & \mapsto & \frac{2z+1}{z+1} \end{array} \qquad e : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Exemple 2.7 :
La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ est-elle injective ? surjective ? Déterminer le nombre d'antécédents par f d'un éléments $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ On rappelle que si $x \in E$, $f^{-1}(x)$ n'a un sens ***QUE*** si f est bijective.
En revanche, pour tout $X \subset F$, $\widehat{f}^{-1}(X)$ a toujours un sens, que f soit bijective ou non.
Le sens des notations utilisées dépend du types des objets.

Remarque :
Dans le cas où $f : E \to F$ est une application bijective, f^{-1} est donc une application bien définie. Dans ce cas, la pré-image par f coïncide avec l'image directe par f^{-1}, *i.e.* les notations sont cohérentes : $\forall X \subset F$, $\widehat{f}^{-1}(X) = (f^{-1})(X)$. Dans le cas où f est bijective, on peut comprendre cette notation dans le sens qu'on veut. En revanche, si f n'est pas bijective, on aura pas le choix. La notation $\widehat{f}^{-1}(X)$ fera automatiquement et obligatoirement référence à la pré-image par l'application.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre f^{-1} et $1/f$! ! La réciproque d'une application n'est pas on inverse ! Bien prendre garde aux notations et à leur définition.

Remarque :
En pratique, pour montrer qu'une fonction est bijective, on peut :

- Montrer qu'elle est injective et surjective (la surjectivité revient souvent à trouver f^{-1})
- Trouver une application g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$
- Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x avec $y \in F$ fixée.
- Utiliser d'autres méthodes qui plus spécifique à la situation (théorème de la bijection dans $\mathbb{R}$)

Proposition 2.5 (Bijectivité de la réciproque) :
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration :
C'est évident avec la caractérisation précédente. □

Proposition 2.6 (Unicité de la réciproque) :
Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ bijective.
Alors $\exists! g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, *i.e.* f^{-1} est unique.

Démonstration :
Soit $g, h : F \to E$ telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E = h \circ f$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F = f \circ h$. Alors

$$\begin{aligned}
h &= h \circ \mathrm{Id}_F && \text{def identité} \\
&= h \circ (f \circ g) && \text{def } g \\
&= (h \circ f) \circ g && \text{associativité} \\
&= \mathrm{Id}_E \circ g && \text{def } h \\
&= g && \text{def identité}
\end{aligned}$$

D'où l'unicité de la réciproque de f (ce qui justifie a posteriori la notation f^{-1} et la dénomination de *LA* réciproque de f). □

Exemple 2.8 :
Soit E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective et donner f^{-1}.

Proposition 2.7 (Graphe d'une réciproque) :
Soit E un ensembles et $f : E \to E$ bijective.
Alors $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ est le symétrique par rapport à la première diagonale $\Delta = \{(x, x),\ x \in E\}$.

Démonstration :
On a
$$(x,y) \in \mathrm{Gr}(f) \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y,x) \in \mathrm{Gr}(f)$$

□

Proposition 2.8 (Composée d'injection, surjection, bijection [✓]) :
Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective

(iii) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration :

(i) Comme f et g sont supposées injectives, on sait que $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \implies x = y$ et $\forall z, t \in F$, $g(z) = g(t) \implies z = t$. On veut montrer que $g \circ f$ est injective c'est à dire que si l'on prend $x, y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ alors $x = y$.

Soit donc $x, y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. On a donc $g(f(x)) = g(f(y))$ avec $f(x), f(y) \in F$. Or g est injective, donc $f(x) = f(y)$. Mais l'injectivité de f nous fournit alors $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective.

(ii) On suppose que $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$ et $\forall z \in G$, $\exists t \in F$, $g(t) = z$. On veut montrer que $\forall z \in G$, $\exists x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.

Soit donc $z \in G$. La surjectivité de g nous donne l'existence d'un $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Mais comme $y \in F$ et f est surjective, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc finalement $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. D'où $g \circ f$ est surjective.

(iii) Si on suppose que f et g sont bijectives, elles sont donc injectives et surjectives. Par le (i) et (ii) que l'on vient de montrer, $g \circ f$ est donc injective et surjective, donc bijective.

D'autre part, on sait que comme $g \circ f : E \to G$, on aura $(g \circ f)^{-1} : G \to E$. Or $G \xrightarrow{g^{-1}} F \xrightarrow{f^{-1}} E$. Et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = \mathrm{Id}_E$ par associativité de la composition. De même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_G$. D'où $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Exemple 2.9 :
Montrer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et sqrt : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définies par $\exp(x) = e^x$ et sqrt$(x) = \sqrt{x}$ sont des bijections. En déduire l'inverse de $\exp \circ$sqrt et sqrt $\circ \exp$.

!!! ATTENTION !!!

Les implications de la proposition précédentes ne sont que des implications ! Les réciproques sont fausses en général. Si $f \circ g$ est injective, on peut très bien f ou g non injectives. Et de même pour la surjectivité.

Contre-exemple :
Si on considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$, alors $g \circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Remarque :
Il y a tout un tas de mini-propriétés que l'on pourrait énoncer dans ce genre. Certaines sont dans la feuille d'exo. Mais pas toutes. Il faudra les créer et les prouver en fonction des besoins.

Exemple 2.10 :
Soit E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Proposition 2.9 (Injectivité, surjectivité d'une composée [✓]) :
Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(i) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration :
Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors, $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ et donc $x = y$ par injectivité de $g \circ f$. Donc f est injective.

Soit $y \in G$. Alors $\exists x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$ par surjectivité de $g \circ f$. Et donc $y = g(f(x))$ par définition de la composition. Or $f(x) \in F$. Donc $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$. Et donc g est surjective. □

Proposition 2.10 (Injectivité, Surjectivité et prolongement et restrictions) :
Soit $A, , B, E, F$ des ensembles tels que $A \subset E \subset B$. Soit $f : E \to F$.

1. Si f est injective, alors $f\big|_A$ est aussi injective.
2. Si f est surjective, alors tout prolongement de f à B est aussi surjective.

Démonstration :
Supposons f injective. Soit $x, y \in A$ tel que $f\big|_A(x) = f\big|_A(y)$. Alors, par définition de la restriction, $f(x) = f(y)$. Et par injectivité, $x = y$. Donc $f\big|_A$ est injective.

Supposons f surjective. Soit $\widetilde{f}$ un prolongement de f à B. Donc $\widetilde{f}\big|_E = f$. Alors $\widehat{\widetilde{f}}(B) \supset \widehat{\widetilde{f}}(E) = F$ par surjectivité. Or $\widetilde{f} : B \to F$. Donc $\widehat{\widetilde{f}}(B) \subset F$. D'où $\widehat{\widetilde{f}}(B) = F$ et donc $\widetilde{f}$ est surjective. $\square$

2.3 Fonctions indicatrices

Définition 2.10 (Fonctions indicatrices) :
Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la fonction indicatrice de A, noté $\mathbb{1}_A$ ou χ_A, par :

$$\mathbb{1}_A \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La fonction indicatrice est donc la fonction qui teste si un élément donné est dans l'ensemble A ou non, *i.e.* $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$.

Proposition 2.11 (Fonctions indicatrices et opérations ensemblistes) :
Soit E un ensembles et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors :

(i) $\mathbb{1}_E$ est la fonction constante égale à 1 de $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$

(ii) $\mathbb{1}_\emptyset$ est la fonction constante égale à 0 de $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$

(iii) $\forall A \subset E$, $A = \widehat{\mathbb{1}_A^{-1}}(\{1\})$ et $\overline{A} = \widehat{\mathbb{1}_A^{-1}}(\{0\})$.

(iv) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

(v) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

(vi) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

(vii) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B}$

(viii) $\forall f : E \to \{0,1\}$, $f = \mathbb{1}_{\widehat{f^{-1}}(\{1\})}$.

Démonstration :

(i) C'est évident. Il suffit de l'écrire.

(ii) idem.

(iii) C'est évident aussi. C'est la définition de la fonction indicatrice avec la définition des pré-images.

(iv) Là encore c'est évident. Il suffit de l'écrire. On peut le déduire aussi facilement du (vi).

(v) Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 &\iff x \in A \cap B \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x) \\ &\iff \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 && \text{car } \mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x) \in \{0,1\} \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour l'autre cas.

(vi) Il suffit de vérifier que les deux fonctions coïncident sur $\overline{A \cup B}$, $A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus (A \cap B)$ et $A \cap B$ car $(\overline{A \cup B},\ A \setminus (A \cap B),\ B \setminus (A \cap B),\ A \cap B)$ forme une partition de E.

(vii) On le déduit directement du point précédent en prenant $A = (A \cap B) \uplus (A \setminus B)$.

(viii) Soit $f : E \to \{0,1\}$. On pose $A = \widehat{f}^{-1}(\{1\})$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A(x) = 1 &\iff x \in A = \widehat{f}^{-1}(\{1\}) \\ &\iff f(x) = 1 && \text{def préimage} \end{aligned}$$

Et de même $\mathbb{1}_A(x) = 0 \iff f(x) = 0$ en passant au complémentaires (sans oublier que f est à valeurs dans $\{0,1\}$). D'où l'égalité.

□

Remarque :
On pourrait donner beaucoup d'autres propriétés pour les fonctions caractéristiques. Mais on va se contenter de ça dans le cours. Pour le reste, il faudra l'inventer sur le moment et le démontrer, en fonction des besoins.

3 Relations d'Équivalence

L'intérêt des relations d'équivalence sur un ensemble est d'avoir des classes d'équivalences. Les classes d'équivalence permettent de regrouper tous les éléments de l'ensemble "qui sont les mêmes" du point de vue de la relation d'équivalence. Cela permet donc de découper l'ensemble en grosses parts et de pouvoir "identifier" tous les éléments d'une même part en observant via le chas de l'aiguille de la relation d'équivalence. En choisissant une bonne relation d'équivalence qui nous intéresse pour le problème que nous sommes en train d'étudier, cela permet donc de réduire drastiquement l'étude à faire. Plutôt que d'étudier chacun des éléments de l'ensemble (ce qui peut être très long), il suffit de le faire pour un seul représentant de chaque classe d'équivalence (qui sont peu nombreuses, si les choses sont bien faites), et c'est fini.

Définition 3.1 (Relation d'équivalence) :
Une *relation d'équivalence* est une relation binaire (donc entre deux éléments) d'un ensemble E vérifiant les propriétés :

- $\forall a \in E$, $a \sim a$ [*Réflexivité*]
- $\forall a, b \in E$, si $a \sim b$, alors $b \sim a$ [*Symétrie*]
- $\forall a, b, c \in E$, si $a \sim b$ et $b \sim c$, alors $a \sim c$ [*Transitivité*]

On peut définir le graphe d'une relation d'équivalence comme l'ensemble $\mathrm{Gr}(\sim) = \{(a, b) \in E^2, a \sim b\}$.

Exemple 3.1 :

- La relation d'égalité est une relation d'équivalence dans n'importe quel ensemble.
- Dans $\mathbb{R}$, on définit $a \sim b$ ssi $|a| = |b|$. C'est une relation d'équivalence.
- Dans $\mathbb{Z}$, la relation $a \sim b \iff a - b$ est divisible par 6 est une relation d'équivalence.
- Dans n'importe quel ensemble la relation $a \sim b \iff a \neq b$ n'est PAS une relation d'équivalence.
- Dans $\mathbb{R}$, la relation $a \sim b \iff a \leq b$ n'est pas une relation d'équivalence.

Remarque :
On utilisera régulièrement la relation de congruence modulo 2π. Par définition, si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $x \equiv y\ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi$. Autrement dit, x et y sont congruents modulo 2π, s'ils sont au même endroits sur le cercle trigonométrique, au nombre de tour près.

Remarque :
La réflexivité est-elle nécessaire ? La symétrie et la transitivité n'impliquent-elles pas la symétrie ?

Définition 3.2 (Classes d'équivalences) :
Si E est un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E, on définit la *classe d'équivalence de* a dans E pour la relation $\sim$, par $\mathrm{Cl}(a) = \{b \in E | a \sim b\}$. C'est l'ensemble des éléments qui sont en relations avec a pour $\sim$. Donc $\mathrm{Cl}(a)$ est un sous-ensemble de E.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est une classe d'équivalence, tout élément de A est un *représentant* de la classe d'équivalence A.

On note aussi parfois une classe d'équivalence $\overline{a}$. Tout élément se trouve dans une classe d'équivalence : la sienne. La réflexivité de la relation nous assure toujours d'avoir $a \sim a$ et donc par définition $a \in \mathrm{Cl}(a)$.

Exemple 3.2 :
Dans $\mathbb{Z}$, pour le relation d'équivalence $a \equiv b \iff 4|(a-b)$, il y a 4 classes d'équivalences dont des représentants sont 0, 1, 2 et 3, correspondants aux 4 possibilités des restes dans la division euclidienne par 4.

Proposition 3.1 (Propriété des classes d'équivalences [✓]) :
Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

1. $\forall x \in E,\ \mathrm{Cl}(x) \neq \emptyset$.
2. $\forall a, b \in E,\ \mathrm{Cl}(a) = \mathrm{Cl}(b) \iff a \sim b \iff a \in \mathrm{Cl}(b) \iff b \in \mathrm{Cl}(a)$.
3. $\forall a, b \in E,\ a \nsim b \iff \mathrm{Cl}(a) \cap \mathrm{Cl}(b) = \emptyset$.
4. $E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{Cl}(x)$.

Démonstration :

1. Ce point est tautologique vu que la relation est réflexive.
2. Si $\overline{a} = \overline{b}$, on a en particulier $a \in \overline{a} = \overline{b}$ donc $a \sim b$. Et inversement, si $a \sim b$, par définition $a \in \overline{b}$. Et finalement, par transitivité de la relation, on a $\overline{a} \subset \overline{b}$. L'autre inclusion est vérifiée de la même manière.
3. Si $a \nsim b$ et $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Donc $\exists c \in E,\ a \sim c$ et $c \sim b$. Donc par transitivité, $a \sim b$. Ce qui est absurde. Donc $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$. Réciproquement, si $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$, on a en particulier $a \notin \overline{b}$ et donc par définition $a \nsim b$.

□

Remarque :
En particulier, les classes d'équivalences forment une partition de E, à condition de ne considéré qu'un représentant par classe pour ne pas avoir de redondance.

Remarque (Ensemble quotient (HP)) :
On peut définir l'ensemble quotient $E/_\sim$ qui est alors l'ensemble des classes d'équivalences. Donc $E/_\sim \subset \mathcal{P}(E)$. Il n'y a alors plus de problème de redondance.

Exemple 3.3 :
On définit dans $\mathbb{C}$:

$$z \sim z' \iff |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.