



Chapitre 3 - TD : Ensembles, Applications et Relations d'équivalence

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

17 septembre 2024

1 Ensembles

Exercice	Indications
1	Pour "voir" les choses, vous pouvez faire des patates. Attention toutefois à bien faire un dessin dans le cadre le plus général. Il ne doit rien comporter de particulier.
2	Certaines questions nécessitent de revenir à un niveau élémentaire (<i>i.e.</i> considérer des éléments). D'autres peuvent se faire plus rapidement en raisonnement directement sur les ensembles. Mais les éléments marchent toujours.
3	Une partie a été faite en exemple dans le cours. Pour la question, on utilisera la question 3 de l'exercice 1. Pour la question 3, on utilisera la question 4 de l'exercice 2.
4	La formulation ne donne pas beaucoup d'indications. C'est fait exprès. On peut faire des patates pour se forger une intuition, puis démontrer.
5	Il faut être méticuleux. Comme pour une équation de nombres, on raisonne par analyse synthèse. Commencer par trouver des conditions sur A et B pour qu'il puisse exister des solutions. Sous ces conditions, considérer une solution et essayer de déterminer la forme qu'a cette solution. Puis faire la réciproque.
6	C'est assez bien guidé.

2 Applications

Exercice	Indications
7	S'inspirer d'un résultat du cours.
8	Le but est de bien comprendre ce qu'est une bijection et d'apprendre à manipuler les quantificateurs de la définition.
9	On demande juste de prouver une bijectivité. Il n'y a pas besoin d'outils d'analyse sophistiqués. En particulier, il est inutile de dériver quoi que ce soit (c'est d'ailleurs interdit si vous n'avez pas justifié au préalable la dérivabilité).
10	Ce n'est qu'un jeu d'écriture. Pour se familiariser avec la notion de composition.
11	Idem, mais en plus intéressant. Il faut aller doucement et écrire les définitions avec précautions. Et tout devrait bien se passer.
12	C'est très classique. Et assez simple. Vous savez comment montrer une implication. Et on connaît les définitions. Il ne reste qu'à tout écrire.
13	Comme au dessus. Attention à ne pas se tromper dans les définitions, y compris de ce qu'on croit être simple.
14	Tiens, des composées qui sont injectives ou surjectives ? Il n'y aurait pas un résultat du cours qui nous permettrait d'en déduire une injectivité ou surjectivité pour certaines fonctions ? Vous noterez que ce sont des composées de trois fonctions. Et la composition est associative.
15	La difficulté de cet exercice est de ne pas se tromper "d'étage". Les éléments auxquels s'applique la fonction sont des ensembles. Donc les images directes et réciproques sont ... Mais en prenant son temps et en gardant bien la tête froide pour appliquer les définitions, il n'y a pas trop de problèmes.
16	On a plusieurs formulations de l'injectivité. Il y en a une qui est compatible avec la stricte croissance.
17	On fait évidemment un raisonnement par l'absurde. Attention aux définitions et à la nature des objets. Bien garder la tête froide, comme d'habitude. Utiliser la surjectivité de f avec A et regarder où peut bien vivre un antécédent de A .

3 Relations d'équivalences

Exercice	Indications
18	C'est le début, on commence par se familiariser avec la notion de relation d'équivalence. Donc pas de difficulté particulière. Il faut juste appliquer les définitions et faire des vérifications. Attention quand même à la rédaction et à la gestion des quantificateurs.
19	Le piège est dans la question 2. En particulier, il y a une équation à résoudre. Ne pas aller trop vite pour ne pas dire de bêtises. Et attention en comptant.
20	Idem qu'au dessus.
21	Là, c'est un peu plus délicat. Le but est de vérifier que vous avez bien compris ce qui se passe. Il n'y a donc pas de difficultés fondamentales, mais les choses sont formulées de façon perturbantes.
22	C'est un jeu d'écriture. Attention aux pièges de l'écriture.
23	Ça se complique un peu. Il commence à y avoir beaucoup de quantificateurs. Et c'est bien sûr là, la difficulté. Mais comme d'habitude, en y allant doucement, tout devrait bien se passer.