NOM :
Prénom :

Mardi 17 Septembre 2024

Lycée Loges

Interrogation 1

Calcul Algébrique

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Binôme de Newton.
Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. 3ème identité remarquable (identité de Bernoulli).
Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

3. Définition des coefficients binomiaux.
Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Somme géométrique.
Soit $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

5. Propriétés arithmétiques des coefficients binomiaux.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) et si $k \in \{1, \dots, n\}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

6. Définition des factorielles.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $n!$ par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

7. Formule de Pascal.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} 2^i$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} 2^i &= \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{i}{k} 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 2^i && \text{interversions sommes doubles} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \right) 2^i && \text{linéarité} \\ &= \sum_{i=0}^{n} 2^i \times 2^i && \text{Newton} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} 4^i \\
&= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} && \text{somme géo de raison } 4 \neq 1 \\
&= \frac{1}{3}(4^{n+1}-1).
\end{aligned}
$$