Chapitre 4 - TD :
Fonctions usuelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

24 septembre 2024

1 Puissances et logarithmes

Exercice 1 :
Soit $x > 0$ et $a = e^{x^2}$ et $b = \frac{\ln\left(x^{1/x}\right)}{x}$. Simplifier a^b.

Exercice 2 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x + e^{1-x} = e + 1$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 3 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Exercice 4 :
Montrer que :

$$\begin{cases} \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x \\ \forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \end{cases}$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$(1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 - 1/n)^{-n}$$

Exercice 5 :
Soit $0 < a \leq b$ et $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudier la monotonie de f et en déduire

$$\ln(1 + a/b) \ln(1 + b/a) \leq \ln(2)^2$$

Exercice 6 (Lemme de Gibbs (*)) :
Justifier la relation

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$$

et étudier les cas d'égalité.

Soit $(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

et étudier les cas d'égalité.

2 Fonctions trigonométriques

Exercice 7 :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a+b+c \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. Développer

$$\cos(3a) \qquad \text{et} \qquad \tan(a+b+c)$$

Exercice 8 :

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(p) + \sin(q) \neq 0$. Simplifier

$$\frac{\cos(q) - \cos(p)}{\sin(p) + \sin(q)}$$

et en déduire la valeur de $\tan(\pi/24)$.

Exercice 9 :

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; |\cos(x) - \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

'

Exercice 10 :

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a+kb) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a+kb)$$

Exercice 11 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$\begin{array}{llll} a) & \cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4) & b) & \cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1 \\ c) & \sin(x) + \sin(3x) = 0 & d) & \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 \\ e) & 3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6} & f) & 2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0 \\ g) & \tan(x)\tan(2x) = 1 & & \end{array}$$

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 12 :

Simplifier les expressions suivantes (en mettant les bons quantificateurs) :

$$\begin{array}{llllll} a) & \cos(2\arccos(x)) & b) & \cos(2\arcsin(x)) & c) & \sin(2\arccos(x)) \\ d) & \cos(2\arctan(x)) & e) & \sin(2\arctan(x)) & f) & \tan(2\arcsin(x)) \end{array}$$

Exercice 13 :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier de deux manières différentes, l'expression :

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Exercice 14 :
Étudier les fonctions suivantes afin de pouvoir les dessiner facilement

$a)$ $f_1 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(x))$

$b)$ $f_2 : x \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$

$c)$ $f_3 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$

$d)$ $f_4 : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(\sin(2x))$

Exercice 15 :
On se propose de calculer, de deux façons différente $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. (a) Calculer $(1+i)(1+2i)(1+3i)$.
   (b) Exprimer un argument de $1+i$, $1+2i$ et $1+3i$ à l'aide de $\arctan$, puis en déduire la valeur de $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.
2. (a) Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(c)$, pour $a, b, c \in]0, \pi/2[$ tels que $a+b+c \in]0, \pi/2[$.
   (b) Calculer directement la valeur de $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ à l'aide de l'application directe du cours sur l'arctangente.
3. [Bonus ***] Essayer de trouver une méthode similaire pour montrer la formule de Machin :

$$\pi = 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239).$$

Exercice 16 :
Simplifier :

1. $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
2. $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2+\sqrt{3})$
3. $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$

Exercice 17 :
Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1) $\arcsin(x) = \arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)$
2) $\arcsin(\tan(x)) = x$
3) $\arccos(x) = \arcsin(2x)$
4) $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$
5) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$
6) $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = x$

Exercice 18 (Choix d'un argument en physique et en SI) :
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ un argument de z.

1. Montrer que

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0, b > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

2. Montrer que
$$\theta = \operatorname{sign}(b) \arccos(a/|z|)$$

Exercice 19 :
On va calculer $\arctan(a) + \arctan(b)$ pour $ab \neq 1$.

1. Soit $a, b > 0$.
   (a) Montrer que $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.
   (b) Calculer $\arctan(2) - \arctan(3)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(a) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f'.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab \neq 1$. Montrer que $f(b)$ est un multiple entier de π, en discutant le signe de a et $ab - 1$.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\arctan(a) + \arctan(b)$.
3. Calculer :
   (a) $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
   (b) $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Remarque :
On pourrait aussi retrouver la formule de Machin rappelé dans l'exercice 15

4 Fonctions hyperboliques

Exercice 20 :
Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh}(x) \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 21 :
Soit $y \in]-\pi/2, \pi/2[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Montrer que
$$\operatorname{th}(x/2) = \tan(y/2)\,, \qquad \operatorname{th}(x) = \sin(y), \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}$$

Exercice 22 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb)$$
puis exprimer $\operatorname{ch}(a)^n$ et $\operatorname{sh}(a)^n$ en fonction des $\operatorname{ch}(ka)$ et $\operatorname{sh}(ka)$ (selon la parité de n) et enfin $\operatorname{ch}(na)$ et $\operatorname{sh}(na)$ en fonction de $\operatorname{ch}(a)^k$ et $\operatorname{sh}(a)^k$.

Exercice 23 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier
$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(x/2^k)$$
en calculant $P_n(x)\operatorname{sh}(x/2^n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

Exercice 24 :
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, montrer que

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}$$

Calculer alors

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$$