DM 1

Calculs Algébriques

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 27 Septembre 2022

Problème 1 (Manipulations classiques de sommes) :

1. Soit $n \geq 2$.
   (a) Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} - (-1)^n - n(-1)^{n-1} \\ &= (1-1)^n - (-1)^n - n(-1)^{n-1} && \text{Newton} \\ &= -n(-1)^{n-1} - (-1)^n.\end{aligned}$$

   (b) Soit $i, j \in \{2, \dots, n\}$, avec $j \leq i$. Alors

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{n!i!}{i!(n-i)!j!(i-j)!} = \frac{n!}{(n-i)!j!(i-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-i)!(i-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}.$$

   (c) On a d'abord $\sum_{i=n}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{n}(-1)^{n-i} = 1$. Et si $j \in \{2, \dots, n-1\}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} &= \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i} && \text{cf 1.(b)} \\ &= \binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i} \\ &= \binom{n}{j}\sum_{k=1}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^{k} && \text{chgt indice } k = n-i \\ &= \binom{n}{j}(1-1)^{n-j} && \text{Newton} \\ &= 0\end{aligned}$$

   On vient donc de montrer que

$$\forall j \in \{2, \dots, n\},\ \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

(d) Là encore, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}\left(\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}a_j\right) &= \sum_{2\leq j\leq i\leq n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j \\
&= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(a_j\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}\right) \\
&= a_n & \text{cf 1.(c)}
\end{aligned}$$

(e) Là encore, ce n'est que du calcul :

$$\begin{aligned}
& n(-1)^{n-1}+(-1)^n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! \\
=& n(-1)^{n-1}+(-1)^n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(1+\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}a_j\right) & \text{cf énoncé} \\
=& n(-1)^{n-1}+(-1)^n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}a_k \\
=& a_n & \text{cf 1.(a) et 1.(d)}
\end{aligned}$$

2. Enfin,

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 2,\ a_n &= n(-1)^{n-1}+(-1)^n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! & \text{cf 1.(e)} \\
&= n(-1)^{n-1}+(-1)^n+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n(-1)^{n-1}+(-1)^n+n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n(-1)^{n-1}+(-1)^n+n!\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} & \text{chgt indice } \ell=n-k \\
&= n!\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+n!\frac{(-1)^n}{n!}+n!\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \\
&= n!\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}
\end{aligned}$$

3. On va maintenant vérifier que cette expression de (a_n) vérifie toujours la relation de récurrence.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 4,\ (n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}) &= (n-1)\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)(n-2)!\left((n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+n\frac{(-1)^n}{n!}\right)\\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\\
&= a_n
\end{aligned}$$

Problème 2 (Sommes trigonométriques et inégalités) :

1. On a $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $C_1(\theta)=\cos(\theta)\cos(\theta)=\cos(\theta)^2\geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\forall\theta\in\mathbb{R},\ C_2(\theta) &= \cos(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)^2\cos(2\theta)\\
&= \cos(\theta)^2(1+\cos(2\theta))\\
&= \cos(\theta)^2(1+2\cos(\theta)^2-1)\\
&= 2\cos(\theta)^4\geq 0
\end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\forall p\in\mathbb{Z},\ \cos(p\pi)=\mathfrak{Re}(e^{ip\pi})=\mathfrak{Re}\left((e^{i\pi})^p\right)=\mathfrak{Re}((-1)^p)=(-1)^p.$$

On peut le démontrer par récurrence également. Ou bien en faisant une disjonction de cas selon la parité de p. Il y a sûrement d'autres façons de le faire.

(b) Par le calcul, on a

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall p\in\mathbb{Z},\ C_n(p\pi) &= \sum_{k=1}^{n}\cos(p\pi)^k\cos(kp\pi) && \text{def } C_n\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{pk}(-1)^{pk} && \text{cf 2a}\\
&= \sum_{k=1}^{n}1\\
&= n
\end{aligned}$$

3. (a) Par le calcul,

$$\begin{aligned}
\forall\theta\in\mathbb{R},\ 1-\cos(\theta)e^{i\theta} &= e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\cos(\theta))\\
&= e^{i\theta}i\sin(-\theta) && \text{def } e^{i\theta}\\
&= -i\sin(\theta)e^{i\theta} && \text{par imparité de } \sin
\end{aligned}$$

(b) En posant $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $S_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\cos(\theta)^k\sin(k\theta)$, on a

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ C_n(\theta)+iS_n(\theta) &= \sum_{k=1}^{n}\cos(\theta)^k(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)) && \text{linéarité somme}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\cos(\theta)^k e^{ik\theta}
\end{aligned}$$

Par ailleurs,
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta)e^{i\theta} = 1 \implies e^{i\theta} \in \mathbb{R},$$
puisque $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) \in \mathbb{R}$. Mais $e^{i\theta} \in \mathbb{R} \iff \theta \equiv 0[\pi] \iff \exists p \in \mathbb{Z},\ \theta = p\pi$. Et $\cos(p\pi)e^{ip\pi} = (-1)^p(-1)^p = 1$. Donc
$$\cos(\theta)e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0[\pi] \iff \exists p \in \mathbb{Z},\ \theta = p\pi.$$

D'où
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ C_n(\theta) + iS_n(\theta) &= \begin{cases} \sum_{k=1}^n 1 & \text{si } \theta \equiv 0[\pi] \\ \frac{\cos(\theta)e^{i\theta} - \cos(\theta)^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-\cos(\theta)e^{i\theta}} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } \theta \equiv 0[\pi] \\ \frac{\cos(\theta)e^{i\theta}}{-i\sin(\theta)e^{i\theta}} \left(1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}\right) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{cf 3a} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } \theta \equiv 0[\pi] \\ i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}(1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned}
C_n(\theta) &= \mathfrak{Re}\left(i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(1 - \cos(\theta)^n e^{in\theta}\right)\right) \\
&= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\mathfrak{Re}\left(i - i\cos(\theta)^n\cos(n\theta) + \cos(\theta)^n\sin(n\theta)\right) \qquad \mathbb{R}\text{-linéarité } \mathfrak{Re} \\
&= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\cos(\theta)^n\sin(n\theta) \\
&= \frac{\cos(\theta)^{n+1}\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

4. D'après les question précédentes, on a
$$\forall \theta \in [-\pi, \pi],\ C_3(\theta) = \begin{cases} 3 & \text{si } \theta \in \{-\pi, 0, \pi\} \\ \frac{\cos(\theta)^4\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $C_3(\theta)$ est du signe de $\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$. Par ailleurs, le sinus est négatif sur $]-\pi, 0[$ et positif sur $]0, \pi[$, donc, par 2π-périodicité, on en déduit

θ	$-\pi$		$-2\pi/3$		$-\pi/3$		0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$\sin(3\theta)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$\sin(\theta)$	0			$-$			0			$+$			0
$C_3(\theta)$	3	$+$	0	$-$	0	$+$	3	$+$	0	$-$	0	$+$	3

5. (a) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq 1$, on a, d'après la question 3c,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |C_n(\theta)| = \frac{|\cos(\theta)^{n+1}|}{|\sin(\theta)|}|\sin(n\theta)| \leq \frac{|\cos(\theta)|^{n+1}}{|\sin(\theta)|}.$$

(b) Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, $C_n(\theta) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors $|\cos(\theta)| < 1$ et donc $|\cos(\theta)|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $|C_n(\theta)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $C_n(\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème des gendarmes.