NOM :
Prénom :

Mardi 24 Septembre 2024

Interrogation 2

Complexes

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Relation coefficients / racines.
Soit $a, b, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. z_1 et z_2 sont solutions de $z^2 + az + b = 0$ si, et seulement si, $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases}$.

2. Inégalités triangulaires (énoncé complet).
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$
et $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$

3. Définition du module d'un complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, noté $|z|$, par $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$.

4. Définition du conjugué d'un complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le conjugué de z, noté $\overline{z}$, par $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Im}(z)$.

5. Formules d'Euler.
$\forall \theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

6. Définition de l'exponentielle complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z, noté e^z, par $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\,\mathfrak{Im}(z)} = e^{\mathfrak{Re}(z)}(\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z)))$.

7. Caractérisation des réels et imaginaires purs par le conjugué.
Soit $z \in \mathbb{Z}$. Alors $2\,\mathfrak{Re}(z) = z + \overline{z}$ et $2i\,\mathfrak{Im}(z) = z - \overline{z}$. Et donc $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

8. Expression des racines n-ème de l'unité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n-ème de l'unité, noté $\mathbb{U}_n$ est
$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation $z^2 + (2+3i)z - 2 + 4i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 + (2+3i)z - 2 + 4i = 0$. On pose
$$\Delta = (2+3i)^2 - 4(-2+4i) = -5 + 12i + 8 - 16i = 3 - 4i.$$
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 & \text{égalité des modules} \\ a^2 - b^2 = 3 & \text{égalité des parties réelles} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a^2 = 4 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ b^2 = 1 & L2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$
Or $2ab = \mathfrak{Im}(\delta^2) = \mathfrak{Im}(\Delta) = -4 < 0$. Donc a et b sont de signes contraires. On choisit alors $\delta = 2 - i$.
D'où
$$z = \frac{-2-3i+2-i}{2} = -2i \quad \text{ou} \quad z = \frac{-2-3i-2+i}{2} = -2+i.$$