DS 2
Calculs - Complexes - Théorie des ensembles
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 02 Octobre 2022

Problème 1 (Homographie sur les complexes de module 1) :

Partie I : Une équation dans $\mathbb{U}$

Soit $n \geq 2$ et $\beta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n + 1 = 0$. Alors $z^n = -1 = e^{i\pi}$. Donc z est une racine n-ème de -1. Les racines n-èmes de l'unité étant les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\{z \in \mathbb{C},\ z^n + 1 = 0\} = \left\{e^{i\pi/n}e^{2ik\pi/n},\ 0 \leq k \leq n-1\right\} = \left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}},\ 0 \leq k \leq n-1\right\}.$$

2. Comme $n \geq 2$, on a $\beta^2 = e^{2i\pi/n} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k+1} \\
&= e^{i\pi/n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k} && \text{linéarité de la somme} \\
&= e^{i\pi/n} \frac{1-\beta^n}{1-\beta} && \text{somme géo de raison } \beta^2 \neq 1 \\
&= e^{i\pi/n} \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{2i\pi/n}} && \text{def } \beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $R_n = 0$.

3. On a $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^{2k+1} \\
&= e^{i\pi/n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{2ik\pi/n} && \text{def } \beta \\
&= e^{i\pi/n} \left((1+e^{2i\pi/n})^n - 1\right) && \text{Newton} \\
&= e^{i\pi/n} \left(\left(e^{i\pi/n}(e^{-i\pi/n} + e^{i\pi/n})\right)^n - 1\right) \\
&= e^{i\pi/n} \left(e^{i\pi}(2\cos(\pi/n))^n - 1\right) && \text{Euler}
\end{aligned}$$

$$= -e^{i\pi/n}\left(1 + 2^n \cos(\pi/n)^n\right).$$

D'où $|P_n| = |1 + 2^n \cos(\pi/n)^n|$. Mais comme $\pi/n \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(\pi/n) > 0$ et donc $|P_n| = 1 + 2^n \cos(\pi/n)^n$.

4. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
(1-\beta^2)T_n &= \beta(1-\beta^2)\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} && \text{linéarité de la somme}\\
&= \beta\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2(k+1)}\right)\\
&= \beta\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{j=1}^{n}(j-1)\beta^{2j}\right) && \text{avec le changement de variable } j = k+1\\
&= \beta\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{j=1}^{n} j\beta^{2j} + \sum_{j=1}^{n}\beta^{2j}\right)\\
&= -n\beta^{2n+1} + \sum_{j=1}^{n}\beta^{2j+1}\\
&= -n\beta^{2n}\beta + \sum_{j=1}^{n-1}\beta^{2j+1} + \beta^{2n+1}\\
&= -n\beta + \sum_{j=1}^{n-1}\beta^{2j+1} + \beta\\
&= -n\beta + R_n\\
&= -n\beta && \text{cf 2}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{n\beta}{\beta^2-1}\\
&= \frac{ne^{i\pi/n}}{e^{2i\pi/n}-1}\\
&= \frac{ne^{i\pi/n}}{e^{i\pi/n}(e^{i\pi/n}-e^{-i\pi/n})}\\
&= \frac{n}{2i\sin(\pi/n)} && \text{Euler}\\
&= -\frac{ni}{2\sin(\pi/n)}.
\end{aligned}$$

Et donc $T_n \in i\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in]0, 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc $e^{ix} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kx) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kx) &= \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kx)}\\
&= e^{ia}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\\
&= e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= e^{ia}\frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}
\end{aligned}$$

$$= e^{i(a+nx/2)}\frac{-2i\sin((n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)} \qquad \text{Euler}$$

$$= e^{i(a+nx/2)}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

On en déduit donc, par caractérisation d'un complexe par sa partie réelle et partie imaginaire

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kx) = \cos(a+nx/2)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kx) = \sin(a+nx/2)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

6. Soit $n \geq 2$.

(a) On a $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\mathfrak{Im}(e^{ik\pi/n})\\
&= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}e^{ik\pi/n}\right)\\
&= \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{i\pi/n}-e^{i\pi}}{1-e^{i\pi/n}}\right)\\
&= \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{i\pi/n}+1}{1-e^{i\pi/n}}\right)\\
&= \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{i\pi/(2n)}(e^{i\pi/(2n)}+e^{-i\pi/(2n)})}{e^{i\pi/(2n)}(e^{-i\pi/(2n)}-e^{i\pi/(2n)})}\right)\\
&= \mathfrak{Im}\left(\frac{\cos(\pi/(2n))}{-i\sin(\pi/(2n))}\right)\\
&= \frac{\cos(\pi/(2n))}{\sin(\pi/(2n))}\\
&= \frac{1}{\tan(\pi/(2n))}
\end{aligned}$$

On pouvait aussi le démontrer (mais c'est moins joli) en calculant $S_n\tan(\pi/(2n))$ et montrer que ça vaut 1 (il faut utiliser la formule donnant $\sin a \sin b$ en fonction du cosinus).

(b) On en déduit que $\tan(\pi/8)^{-1} = S_4 = \sum_{k=1}^{3}\sin(k\pi/4) = \sqrt{2}/2 + 1 + \sqrt{2}/2 = 1+\sqrt{2}$, d'où $\tan(\pi/8) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

(c) On a , pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n\tan(\pi/(2n))}\\
&= \frac{2/\pi}{(2n/\pi)\tan(\pi/(2n))}\\
&= \frac{2/\pi}{\frac{\tan(\pi/(2n))}{\pi/(2n)}}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(t)}{t} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\pi/(2n) = 0$, donc, par composition des limites, $(S_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}$$

Partie III : Homographie conservant $\mathbb{U}$

7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{U}$. Alors
$$|h(z)| = \left|\frac{e^{i\theta}}{z}\right| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$
donc $h(z) \in \mathbb{U}$.

8. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Alors
$$e^{i\theta} \times 1 - e^{i\theta}\alpha \times \overline{\alpha} = e^{i\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0$$
car $e^{i\theta} \neq 0$ et $\alpha \notin \mathbb{U}$. Donc h est bien une homographie.

De plus, $\forall z \in \mathbb{U}$, $|\overline{\alpha}z| = |\alpha| \neq 1$. Donc en particulier, $\forall z \in \mathbb{U}$, $\overline{\alpha}z \neq -1$. Et donc h est bien définie sur $\mathbb{U}$

(b) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors
$$\begin{aligned}
|h(z)|^2 &= e^{i\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \times e^{-i\theta}\frac{\overline{z}+\overline{\alpha}}{\alpha\overline{z}+1} \\
&= \frac{(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}z+1)(\alpha\overline{z}+1)} \\
&= \frac{|z|^2 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2|z|^2 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + 1} \\
&= \frac{1 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + 1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$
Donc $h(z) \in \mathbb{U}$ et donc $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

9. (a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors
$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) = |\alpha|2 + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{\alpha}\beta) + |\beta|^2.$$

(b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a + 2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\theta}) = 0$.

Il est facile de voir que si $b = 0$, alors $a = 0$ également.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $b \neq 0$. Alors $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que $b = |b|e^{i\varphi}$. Alors, pour $\theta = \varphi$, on a donc
$$a + 2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\varphi}) = a + 2\,\mathfrak{Re}(|b|) = a + 2|b| = 0$$
En utilisant la caractérisation des complexes par leurs formes algébrique, on en déduit que $\mathfrak{Im}(a) = 0$. Donc $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on a $a + 2|b| = 0$ dans $\mathbb{R}$. On a donc en fait
$$\begin{aligned}
&\forall \theta \in \mathbb{R},\ -2|b| + 2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\theta}) = 0 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(be^{-i\theta} - |b|) = 0 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(b)\cos(\theta) + \mathfrak{Im}(b)\sin(\theta) - |b| = 0 \\
\implies &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(b)^2 + \mathfrak{Im}(b)^2 = \mathfrak{Re}(b)^2\cos(\theta)^2 + 2\,\mathfrak{Re}(b)\,\mathfrak{Im}(b)\cos(\theta)\sin(\theta) + \mathfrak{Im}(b)^2\sin(\theta)^2 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(b)^2(1-\cos(\theta)^2) + \mathfrak{Im}(b)^2(1-\sin(\theta)^2) - 2\,\mathfrak{Re}(b)\,\mathfrak{Im}(b)\cos(\theta)\sin(\theta) = 0 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(b)^2\sin(\theta)^2 + \mathfrak{Im}(b)^2\cos(\theta)^2 - 2\,\mathfrak{Re}(b)\,\mathfrak{Im}(b)\cos(\theta)\sin(\theta) = 0 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ (\mathfrak{Re}(b)\sin(\theta) - \mathfrak{Im}(b)\cos(\theta))^2 = 0 \\
\iff &\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathfrak{Re}(b)\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(b)\cos(\theta)
\end{aligned}$$
En particulier, pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient
$$\begin{cases} \mathfrak{Im}(b) = 0 \\ \mathfrak{Re}(b) = 0 \end{cases}$$

autrement dit, $b = 0$. On aboutit donc à ☠.

On vient donc de montrer que b ne peut pas ne pas être nul. Donc $b = 0$ et par suite $a = 0$. D'où l'implication désirée.

Autre méthode. Si $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $a + 2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\theta}) = 0$, en prenant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, on aboutit à $a = -2\,\mathfrak{Re}(b) = 2\,\mathfrak{Re}(b)$. Donc $\mathfrak{Re}(b) = 0$. Et en prenant $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$, on trouve $a = 2\,\mathfrak{Im}(b) = -2\,\mathfrak{Im}(b)$. Donc $\mathfrak{Im}(b) = 0$. Et donc $a = 0$.

10. (a) Comme $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\forall\theta \in \mathbb{R},\ |h(e^{i\theta})|^2 = 1 &\iff \forall\theta \in \mathbb{R},\ \frac{(ae^{i\theta} + b)(\overline{a}e^{-i\theta} + \overline{b})}{(ce^{i\theta} + d)(\overline{c}e^{-i\theta} + \overline{d})} = 1 \\
&\iff \forall\theta \in \mathbb{R},\ \frac{|a|^2 + a\overline{b}e^{i\theta} + \overline{a}be^{-i\theta} + |b|^2}{|c|^2 + c\overline{d}e^{i\theta} + \overline{c}de^{-i\theta} + |d|^2} = 1 \\
&\iff \forall\theta \in \mathbb{R},\ |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-i\theta}).
\end{aligned}$$

(b) On en déduit également

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) + 2\,\mathfrak{Re}\left((\overline{a}b - \overline{c}d)e^{-i\theta}\right) = 0.$$

La question 9b nous permet alors de conclure

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \overline{a}b = \overline{c}d \end{cases} \tag{1}$$

(c) Puisque $a = 0$, on a donc $\overline{c}d = 0$. Mais d'autre part, on doit avoir $ad - bc = bc \neq 0$. Donc $c \neq 0$ et $d = 0$. Finalement, on a aussi $|b| = |c|$. Donc $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = ce^{i\theta}$. Et par conséquent

$$h(z) = \frac{b}{cz} = \frac{ce^{i\theta}}{cz} = \frac{e^{i\theta}}{z}$$

donc h est bien de la forme indiquée.

(d) On suppose $a \neq 0$. On a donc $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en utilisant (10b). On a donc

$$|a|^2(|c|^2 + |d|^2) = |a|^2(|a|^2 + |b|^2) = |a|^4 + |a|^2|b|^2 = |a|^4 + |c|^2|d|^2$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
|a|^4 + |c|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 - |a|^2|d|^2 = 0 &\iff |a|^2(|a|^2 - |c|^2) + |d|^2(|c|^2 - |a|^2) = 0 \\
&\iff (|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0
\end{aligned}$$

(e) Supposons que $|a| = |c|$. Alors $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $c = ae^{i\theta}$. Par suite de (10b), on a $\overline{a}b = \overline{a}e^{-i\theta}d$ c'est à dire $b = de^{-i\theta}$. Puis $ad - bc = ad - de^{-i\theta}ae^{i\theta} = ad - ad = 0$ et donc ☠. Par conséquent, $|a| \neq |c|$.

(f) On a donc $|a| = |d|$. Donc $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = de^{i\theta}$ (et $d \neq 0$). Et donc $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \frac{\overline{c}d}{\overline{d}}e^{i\theta}$ toujours grâce à (10b). Finalement,

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\
&= \frac{dze^{i\theta} + \frac{\overline{c}d}{\overline{d}}e^{i\theta}}{cz + d} \\
&= \frac{ze^{i\theta} + \frac{\overline{c}}{\overline{d}}e^{i\theta}}{\frac{c}{d}z + 1} \\
&= e^{i\theta}\frac{z + \alpha}{\overline{\alpha}z + 1}
\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\overline{c}}{\overline{b}}$. Donc h est bien de la forme annoncé.

(g) Si h est une homographie conservant $\mathbb{U}$. Alors $\exists a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Comme h doit être définie sur $\mathbb{U}$, on doit avoir $cz + d \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{U}$. Or $(\forall z \in \mathbb{U},\ cz + d \neq 0) \iff |c| \neq |d|$. En effet, on a $|c| = |d| \in \mathbb{R}$, $ce^{i\theta} = -d \iff \exists z \in \mathbb{U},\ cz = -d \iff \exists z \in \mathbb{U},\ cz + d = 0$. Et par contraposition, on a $\forall z \in \mathbb{U},\ cz + d \neq 0 \iff |c| \neq |d|$. On a donc $|c| \neq |d|$ puisque h définie sur $\mathbb{U}$ par hypothèse.

Si $a = 0$, alors h est de la forme $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$, d'après la question 10c. Et si $a \neq 0$, 10f montre que h est de la forme la question 8.

Donc si h est une homographie stabilisant $\mathbb{U}$, alors elle est de l'une des formes annoncées. Et on a déjà montré (question 7 et 8) que les homographies de ces formes conservent $\mathbb{U}$.

Donc h est une homographie conservant $\mathbb{U}$ si, et seulement si, elle est de la forme des questions 7 et 8.

Problème 2 (Autour de la différence symétrique) :

1. Étude préliminaire de la différence symétrique

(a) Soit $A \subset E$. Alors

$$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$

et

$$A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$$

et aussi $A\Delta A = A \setminus A = \emptyset$. Enfin, $\overline{A}\Delta A = (\overline{A} \cup A) \setminus (\overline{A} \cap A) = E \setminus \emptyset = E$.

(b) Soit $A, B \subset E$. On a

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B}) && \text{développement} \\
&= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cap \emptyset \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
\end{aligned}$$

2. Avec des applications

Soit $f : E \to F$.

(a) Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(A) \setminus f(B)$. Donc $y \in f(A)$. Donc, par définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$. Or $y \notin f(B)$. ☠. Donc $x \notin B$. Or $x \in A$. Donc $x \in A \setminus B$. Et donc $y = f(x) \in f(A \setminus B)$.

Donc, par définition de l'inclusion, $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.

(b) On considère $E = F = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On pose alors $A = [-2, 1]$ et $B = [0, 1]$. Alors $A \setminus B = [-2, 0[$ et donc $f(A \setminus B) =]0, 4]$.

Et $f(A) = [0, 4]$ et $f(B) = [0, 1]$ donc $f(A) \setminus f(B) =]1, 4]$. Donc $f(A) \setminus f(B) \subsetneq f(A \setminus B)$.

(c) Supposons f injective.

Soit $A, B \subset E$. On a déjà montré à la question précédente que $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$. Soit $y \in f(A \setminus B)$. Donc $\exists x \in A \setminus B$. Donc $x \in A$. Donc $y = f(x) \in f(A)$.

Si $f(x) \in f(B)$, alors, par définition de $f(B)$, $\exists b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$. Or f est injective (par hypothèse). Donc $x = b$. Donc $x \in B$. Or $x \in A \setminus B$. Donc $x \notin B$. Donc ☠. Donc $f(x) \notin f(B)$. Or $f(x) \in f(A)$. Donc $y = f(x) \in f(A) \setminus f(B)$.

D'où $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$ par définition de l'inclusion. Or l'autre inclusion a été démontré dans la question précédente. D'où, par définition de l'égalité entre ensemble, $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

Réciproquement, supposons que $\forall A, B \subset E,\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Soit $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Alors $f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(\{y\}) = f(B)$. Donc $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$. Donc $f(A \setminus B) = \emptyset$ en utilisant l'hypothèse. Et donc $A \setminus B = \emptyset$. Donc $\{x\} \setminus \{y\} = \emptyset$. Donc $x = y$. D'où f est injective.

Finalement, f est injective, si et seulement si, $\forall A, B \subset E,\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

(d) Soit $A, B \subset E$. Soit $y \in F$. Alors

$$\begin{aligned}
y \in f(A) \cup f(B) &\iff \begin{cases} y \in f(A) \\ \text{ou} \\ y \in f(B) \end{cases} && \text{def } \cup \\
&\iff \begin{cases} \exists x \in A,\ y = f(x) \\ \text{ou} \\ \exists x \in B,\ f(x) \end{cases} && \text{def } f(A) \text{ et } f(B) \\
&\iff \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) && \text{def } \cup \\
&\iff y \in f(A \cup B).
\end{aligned}$$

Soit maintenant $y \in f(A \cap B)$. Alors $\exists x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Donc $x \in A \cap B \subset A$, donc $f(x) = y \in f(A)$. Et de même, $x \in A \cap B \subset B$, donc $f(x) = y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ par définition de l'inclusion.

(e) Soit $A, B \subset E$. Alors $f(A)\Delta f(B) = (f(A) \cup f(B)) \setminus (f(A) \cap f(B))$. D'après la question précédente, $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donc $\overline{f(A) \cap f(B)} \subset \overline{f(A \cap B)}$. Et donc $f(A \cup B) \setminus (f(A) \cap f(B)) = f(A \cup B) \cap \overline{(f(A) \cap f(B))} \subset f(A \cup B) \cap \overline{f(A \cap B)} = f(A \cup B) \setminus f(A \cap B)$. En utilisant enfin la question 2a, on a alors $f(A)\Delta f(B) = f(A \cup B) \setminus (f(A) \cap f(B)) \subset f(A \cap B) \setminus f(A \cap B) \subset f((A \cap B) \setminus (A \cap B)) = f(A \Delta B)$.

On vient donc de montrer que $\forall A, B \subset E,\ f(A)\Delta f(B) \subset f(A \Delta B)$ (indépendamment de l'injectivité ou non de f).

Supposons que f soit injective. On sait déjà que $\forall A, B \subset E,\ f(A)\Delta f(B) \subset f(A \Delta B)$. Il reste donc à montrer l'inclusion contraire. Soit $A, B \subset E$. Soit $y \in f(A \Delta B)$. Donc $\exists x \in A \Delta B$ tel que $y = f(x)$. Donc en particulier, $x \in A \cup B$. Donc $y = f(x) \in f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ d'après 2d. Supposons que $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $y \in f(A)$, donc $\exists z \in A$ tel que $f(z) = y = f(x)$. Par injectivité de f, on en déduit $x = z$. Et donc $x \in A$. De même, $y \in f(B) \implies \exists w \in B$ tel que $f(w) = y = f(x)$. Par injectivité de nouveau, on en déduit $x = w$. Donc $x \in B$. Finalement, $x \in A \cap B$. Or par définition, $x \in A \Delta B$, donc $x \notin A \cap B$. Donc ☠. Et donc, $y \notin f(A) \cap f(B)$. D'où $y \in f(A) \cup f(B) \setminus (f(A) \cap f(B))$. Donc $y \in f(A)\Delta f(B)$. Et par définition de l'inclusion, $f(A \Delta B) \subset f(A)\Delta f(B)$.

Or l'autre inclusion a déjà été prouvé. Finalement, on vient de montrer que $\forall A, B \subset E,\ f(A \Delta B) = f(A)\Delta f(B)$.

Réciproquement, supposons que $\forall A, B \subset E,\ f(A \Delta B) = f(A)\Delta f(B)$. Soit maintenant $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(\{x\}\Delta\{y\}) = f(\{x\})\Delta f(\{y\})$. Or $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(\{y\})$. Donc $f(\{x\})\Delta f(\{y\}) = \emptyset$. Donc $f(\{x\}\Delta\{y\}) = \emptyset$. On en déduit donc $\{x\}\Delta\{y\} = \emptyset$. Or si $x \neq y$, alors $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ et donc $\{x\}\Delta\{y\} = \{x, y\} \neq \emptyset$. ☠. Donc $x = y$ et donc f est injective.

3. Soit $A \subset E$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \Delta X \end{array}$$

(a) Alors

$$\begin{aligned}
f(\emptyset) &= A \Delta \emptyset \\
&= (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) \\
&= A \setminus \emptyset
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
f(E) &= A \Delta E \\
&= (A \cup E) \setminus (A \cap E) \\
&= E \setminus A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A \\ f(\overline{A}) &= A\Delta\overline{A} \\ &= (A\cup\overline{A})\setminus(A\cap\overline{A}) \\ &= E\setminus\emptyset \\ &= E \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &= \overline{A} \\ f(A) &= A\Delta A \\ &= (A\cup A)\setminus(A\cap A) \\ &= A\setminus A \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

(b) Et on a également,

$$\begin{aligned} \forall X\subset E,\ f\circ f(X) &= f(f(X)) && \text{def } \circ \\ &= A\Delta f(X) && \text{def } f \\ &= A\Delta(A\Delta X) && \text{def } f \\ &= (A\Delta A)\Delta X && \text{associativité} \\ &= \emptyset\Delta X && \text{cf } 1a \\ &= X && \text{cf } 1a \end{aligned}$$

D'où, par définition de l'égalité entre application, $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

(c) Par caractérisation de la bijectivité, on en déduit que f est bijective et que $f=f^{-1}$ (aussi grâce à l'unicité de la réciproque).

4. Soit $A\subset E$. On définie g par $\forall X\subset E$, $g(X)=(A\cup X)\Delta A$.

(a) On a donc

$$\begin{aligned} \forall X\subset E,\ g(X) &= (A\cup X)\Delta A \\ &= ((A\cup X)\cup A)\setminus((A\cup X)\cap A) \\ &= (A\cup X)\setminus A && \text{car } A\subset A\cup X \\ &= (A\cup X)\cap\overline{A} \\ &= (A\cap\overline{A})\cup(X\cap\overline{A}) && \text{distributivité} \\ &= X\cap\overline{A} \end{aligned}$$

(b) On a alors facilement,

$$\begin{aligned} \forall X\subset E,\ g\circ g(X) &= g(g(X)) && \text{def } \circ \\ &= g(X)\cap\overline{A} && \text{cf question précédente} \\ &= (X\cap\overline{A})\cap\overline{A} \\ &= X\cap\overline{A} && \text{associativité de } \cap \\ &= g(X) \end{aligned}$$

D'où, par définition de l'égalité entre applications, on en déduit $g\circ g=g$.

(c) Supposons g injective. Soit $Y\in\mathcal{P}(E)$. On a donc $g(Y)=g\circ g(Y)=g(g(Y))$. Et par injectivité de g, on en déduit donc que $Y=g(Y)$. Donc g est surjective.

Supposons maintenant g surjective. Soit $X,Y\subset E$ tel que $g(X)=g(Y)$. Par surjectivité de g, $\exists X',Y'\subset E$ tels que $g(X')=X$ et $g(Y')=Y$. Alors

$$X=g(X')=g(g(X'))=g(X)=g(Y)=g(g(Y'))=g(Y')=Y.$$

Donc g est injective.

(d) Supposons g bijective. En particulier, g est injective. D'après la question précédente, on a donc $\forall X\subset E$, $g(X)=X$. Donc $g=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$. Et donc, en réutilisant l'expression simplifiée de g, on a $\forall X\subset E$, $X=X\cap\overline{A}$. En particulier, $A=A\cap\overline{A}=\emptyset$.

De plus, si $A=\emptyset$, alors il est très facile de voir que $g=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$. Et donc g est bijective.

Finalement, g est bijective, si, et seulement si, $A=\emptyset$.

5. Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

(a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A\Delta X = B$. Alors

$$\begin{aligned}
B\Delta A &= (A\Delta X)\Delta A \\
&= (X\Delta A)\Delta A && \text{commutativité } \Delta \\
&= X\Delta(A\Delta A) && \text{associativité } \Delta \\
&= X\Delta\emptyset && \text{cf } 1a \\
&= X && \text{cf } 1a
\end{aligned}$$

Donc la seule solution possible est $A\Delta B$.

Et bien sûr, il ne faut pas oublier de vérifier que c'est effectivement bien une solution :

$$A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta B = B$$

Donc $A\Delta B$ est l'unique solution de $A\Delta X = B$.

(b) On calcul simplement :

$$\begin{aligned}
\forall X \subset E,\ A \cap (B\Delta X) &= A \cap \Big((B \setminus X) \cup (X \setminus B)\Big) && \text{cf } 1b \\
&= A \cap \Big((B \cap \overline{X}) \cup (\overline{B} \cap X)\Big) \\
&= (A \cap B \cap \overline{X}) \cup (A \cap \overline{B} \cap X)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\forall X \subset E,\ (A \cap B)\Delta(A \cap X) &= \Big((A \cap B) \cap (\overline{A \cap X})\Big) \cup \Big((\overline{A \cap B}) \cap (A \cap X)\Big) && 1b \\
&= \Big((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{X})\Big) \cup \Big((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap X)\Big) \\
&= \Big((A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{X})\Big) \cup \Big((\overline{A} \cap A \cap X) \cup (\overline{B} \cap A \cap X)\Big) && \text{distri} \\
&= (A \cap B \cap \overline{X}) \cup (A \cap \overline{B} \cap X) && \text{comm de } \cap \\
&= A \cap (B\Delta X)
\end{aligned}$$

D'où $\cap$ est distributive sur Δ.

(c) Supposons qu'il existe $X \subset E$ tel que $A \cap (B\Delta X) = C$. Alors on doit avoir $C \subset A$. On suppose donc $C \subset A$. Alors, d'après la question précédente 5b, on a $(A \cap B)\Delta(A \cap X) = C$. Mais d'après la question 5a, on a $A \cap X = (A \cap B)\Delta C$. Or

$$\begin{aligned}
X &= X \cap (A \cup \overline{A}) \\
&= (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) && \text{distri} \\
&= ((A \cap B)\Delta C) \cup (X \cap \overline{A})
\end{aligned}$$

Donc, si on pose $Y = X \cap \overline{A}$, alors $Y \subset \overline{A}$ et donc $\exists Y \subset \overline{A}$ tel que $X = Y \cup ((A \cap B)\Delta C)$.

Réciproquement, si $Y \subset \overline{A}$, on pose $X = Y \cup ((A \cap B)\Delta C)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}
A \cap (B\Delta X) &= (A \cap B)\Delta(A \cap X) && 5b \\
&= (A \cap B)\Delta(A \cap (Y \cup ((A \cap B)\Delta C))) \\
&= (A \cap B)\Delta((A \cap Y) \cup (A \cap ((A \cap B)\Delta C))) \\
&= (A \cap B)\Delta(A \cap ((A \cap B)\Delta C)) \\
&= (A \cap B)\Delta((A \cap B)\Delta(A \cap C)) && 5b \\
&= ((A \cap B)\Delta(A \cap B))\Delta(A \cap C) && \text{associativité de } \Delta \\
&= \emptyset\Delta(A \cap C) && 1a \\
&= C && \text{car } C \subset A
\end{aligned}$$

Et donc l'équation $A \cap (B \cap X) = C$ a des solutions si, et seulement si, $C \subset A$ et dans ce cas, les solutions sont les $Y \cup ((A \cap B)\Delta C)$ avec $Y \subset \overline{A}$.

Exercice 3 (BONUX) :
Commençons par l'unicité. Supposons $\exists z, z' \in \mathbb{C}$, $|z|, |z'| > 1$ et $x = \frac{1}{2}(z + 1/z) = \frac{1}{2}(z' + 1/z')$. Alors $z + 1/z = z' + 1/z' \iff (z - z')(zz' - 1) = 0$. Or $|zz'| > 1$. Donc $zz' \neq 1$. Donc $z = z'$. D'où l'unicité.

Passons à l'existence. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. On considère l'équation $z^2 - 2xz + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 4(x^2 - 1)$. On pose $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = x^2 - 1$. Donc $z = x \pm \delta$.

Il reste donc à montrer que l'une des deux solutions $x + \delta$ ou $x - \delta$ est de module > 1. Raisonnons par l'absurde. Supposons $|x + \delta| \leq 1$ et $|x - \delta| \leq 1$. Notons qu'aucune des deux ne peut être nulle car $(x + \delta)(x - \delta) = 1$.

Alors

$$|x| = \left|\frac{x + \delta + x - \delta}{2}\right| \leq \frac{|x + \delta| + |x - \delta|}{2} \leq 1.$$

D'autre part, $(x - \delta)(x + \delta) = x^2 - \delta^2 = 1$. Donc

$$1 \leq \frac{1}{|x - \delta|} = |x + \delta| \leq 1.$$

Donc $x + \delta, x - \delta \in \mathbb{U}$. Et donc $x - \delta = \overline{x + \delta}$. D'où

$$x = \frac{x + \delta + x - \delta}{2} = \mathfrak{Re}(x + \delta) \in \mathbb{R}.$$

Or $|x| \leq 1$. Donc $x \in [-1, 1]$. Or $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Donc ☠.

Donc $|x + \delta| > 1$ ou $|x - \delta| > 1$.