DS 2
Calculs Algébriques - Complexes - Théorie des Ensembles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 2 Octobre 2022

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Homographie sur les complexes de modules 1) :

Partie I : Une équations dans $\mathbb{U}$

Soit $n \geq 2$ et $\beta = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n + 1 = 0$.
2. Calculer $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k+1}$.
3. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^{2k+1}$. Calculer $|P_n|$.
4. Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k+1}$. Développer et simplifier $(1-\beta^2)T_n$. En déduire une expression de T_n puis que $T_n \in i\mathbb{R}$.
5. Soit $x \in]0, 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple des sommes
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kx).$$
6. On suppose $n \geq 2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   (a) Montrer que $S_n = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$.
   (b) En déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.
   (c) Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$. (On rappelle $\lim_{t\to 0} \frac{\tan(t)}{t} = 1$)

Partir III : Homographies conservant $\mathbb{U}$

On appelle homographie toute application h pour laquelle il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, on ait

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h_θ l'homographie définie par $h_\theta(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$ pour tout $z \neq 0$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h_\theta(z) \in \mathbb{U}.$$

8. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\overline{\alpha} z + 1}.$$

   (a) Vérifier que h est bien une homographie et que h est bien définie sur $\mathbb{U}$.

   (b) Montrer que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Réciproquement, nous allons montrer que les seules homographies conservant $\mathbb{U}$ sont des formes des questions 7 et 8 précédentes. Nous allons avoir besoin de quelques résultats techniques pour commencer.

9. Résultats techniques.

   (a) Établir que
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{\alpha}\beta).$$

   (b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a + 2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\theta}) = 0 \implies a = b = 0.$$

10. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $|c| \neq |d|$ et soit h l'homographie définie sur $\mathbb{U}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et vérifiant $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

   (a) Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$$
   en utilisant le fait que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

   (b) En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.

   (c) On suppose dans cette question que $a = 0$. Montrer alors que l'homographie h est de la forme de la question 7.

   (d) On suppose désormais que $a \neq 0$. Établir que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

   (e) Montrer qu'on ne peut pas avoir $|a| = |c|$ puisque $ad - bc \neq 0$.

   (f) Montrer que le cas $|a| = |d|$ conduit à une homographie du type de la question 8.

   (g) Conclure.

Problème 2 (Autour de la différence symétrique) :
Dans tous le problème, on considère E un ensemble non vide. On considère la différence symétrique de deux sous-ensembles de E définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Étude préliminaire
   (a) Calculer $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta A$ pour tout $A \subset E$.
   (b) Montrer que $\forall A, B \subset E,\ A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

      On admet que Δ est associative et commutative. On pourra donc utiliser librement :

$$\forall A, B, C \subset E,\ A\Delta B = B\Delta A \quad \text{et} \quad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

2. Avec des applications.

   Soit F un ensemble non vide et $f : E \to F$.
   (a) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.
   (b) Donner un contre-exemple à l'inclusion contraire de la question précédente.
   (c) Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A, B \subset E,\ f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
   (d) Montrer que $\forall A, B \subset E,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   (e) Déduire de ce qui précède que f injective si, et seulement si, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A)\Delta f(B) = f(A\Delta B)$.
3. Soit $A \subset E$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A\Delta X \end{array}$$

   (a) Calculer $f(\emptyset)$, $f(\overline{A})$, $f(E)$ et $f(A)$.
   (b) Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.
   (c) En déduire que f est bijective et donner f^{-1}
4. Soit $A \subset E$. On définie g par $g(X) = (A \cup X)\Delta A$.
   (a) Donner une expression plus simple de $g(X)$, pour tout $X \subset E$.
   (b) Montrer que $g \circ g = g$.
   (c) En déduire que g est injective, si, et seulement si, g est surjective.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que g soit bijective, et donner g^{-1} dans ce cas.
5. Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ fixé.
   (a) Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $A\Delta X = B$ d'inconnue $X \subset E$, à l'aide des questions précédentes.
   (b) Montrer que $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap (B\Delta X) = (A \cap B)\Delta(A \cap X)$.
   (c) Montrer alors que l'équation $A \cap (B\Delta X) = C$ a des solutions si et seulement si $C \subset A$ et que les solutions sont les $Y \cup ((A \cap B)\Delta C)$ avec $Y \subset \overline{A}$.

Exercice 3 (BONUX) :

Exercice hors barème qui ne doit abordé que si 75% du sujet a été fait.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],\ \exists z \in \mathbb{C},\ |z| > 1,\ x = \frac{1}{2}(z + 1/z).$$