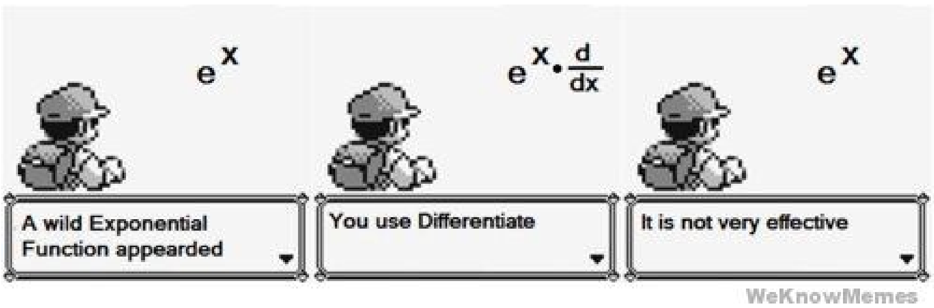
<u>Chapitre 5 - TD :</u>

Équations Différentielles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

1er octobre 2024



1 Équations d'ordre 1

Exercice 1 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin(x)$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos(x)$
5. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$
6. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
7. $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$
8. $(x^2+1)y' - x^2 y = e^x$

Exercice 2 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

Exercice 3 ([✓]) :
Résoudre sur l'intervalle précisé les équations :

1. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$
2. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
3. $x(1+\ln(x)^2)y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 4 ([✓]) :
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \sin(t) + 3\sin(2t)$
2. $y' - \tan(t)y = -\cos(t)$
3. $(1+t^2)y' + ty = 1 + 2t^2$

Exercice 5 :
Résoudre les équation suivantes sur les intervalles I précisé :

1. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $I =]-1, 1[$
2. $y' - \frac{e^x - e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}}y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $\sin(x)^3 y' = 2\cos(x)y$ sur $I =]0, \pi[$
4. $(2+\cos(x))y' + \sin(x)y = (2+\cos(x))\sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $(1+\cos(x)^2)y' - \sin(2x)y = \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $I =]0, \pi[$
7. $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = \mathrm{sh}(x)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
8. $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 6 :
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{x+C}{1+x^2}$$

sont les solutions.

Exercice 7 :
Résoudre l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - (x - i(1+x^2)\cos(x))y = (1+x^2)^{3/2}\cos(x)$$

Exercice 8 ([✓]) :
Résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y(t)^2 = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

en posant $z(t) = y(t)^2$ sur un intervalle le plus grand possible.

Exercice 9 (**) :
Résoudre

$$2xy' + y = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}$$

2 Équations d'ordre 2

Exercice 10 ([✓]) :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' + y = e^x - e^{-x}$
3. $y'' + y = 2\cos(x)^2$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + y' - 2y = e^x$
6. $2y'' - 2y' + 5y = \sin(x)$
7. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + x + 1$
8. $y'' + 2y' + y = e^x$
9. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}$

Exercice 11 :
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 2ie^x$
2. $y'' - (3+4i)y' + (-1+5i)y = (1-i)e^{(1+i)x}$
3. [*] $y'' - 2y' + 3y = \frac{3x^4-2x^3-6x^2+2x+2}{(1-x^2)^{3/2}}$

Exercice 12 :
Soit ω, ω_0 deux réels strictement positifs distincts. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \omega$.

Exercice 13 :
Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

Exercice 14 (**) :
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0$$

soient bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15 ([✓]) :
On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0 \qquad (E)$$

1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables. On pose $z = y + y'$. Justifier que z est dérivable et montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène que l'on déterminera.
2. Résoudre cette nouvelle équation différentielle.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 16 :
Résoudre l'équation différentielle

$$ty'' + 2(1-t)y' - 2y = t$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $z(t) = ty(t)$.

3 Problèmes se ramenant à une équa diff

Exercice 17 ([✓]) :
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 18 :
Déterminer les fonctions dérivables $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [0, 1],\ f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)dt = 0$$

Exercice 19 ([✓]) :
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x$$

Exercice 20 ([✓]) :
Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(2 - x)$$

Exercice 21 ([✓]*) :
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s, t \in \mathbb{R},\ f(s + t) = f(s)f(t)$$

Exercice 22 ([✓]) :**
Trouver toues les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Exercice 23 (Caractérisation de la parité par les équations différentielles) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que f est paire. Étudier la parité de $g : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.
2. Étudier la réciproque.