Chapitre 5

Équations différentielles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

1er octobre 2024

God said

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$

and there was Light.

Les équations différentielles sont très importantes. Inutile de vous le préciser. Vous aurez largement assez de preuves toute cette année en physique et en SI.

Mais la résolution d'équations différentielles est un problème excessivement difficile. Pour cette année, nous nous contenterons d'une introduction aux équations différentielles. On fera l'étude de cas simples pour se familiariser avec la philosophie du principe. Et on se contentera de ça.

> In order to solve this differential equation,
> you look at it until a solution occurs to you.
>
> *George Polya*

Table des matières

Dans tout ce cours (et dans tous les autres), on notera $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Pour ne pas avoir à écrire les énoncés deux fois qui sont rigoureusement identiques dans les deux cas, on utilise cette notation permettant de faire les deux en même temps.

1 Équation différentielle du premier ordre

1.1 Définition

Définition 1.1 (Équation différentielle linéaire du premier ordre) :
Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. L'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I en l'inconnue y (pour le programme).

Une solution de cette équation différentielle est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable vérifiant

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Remarque :
Pour avoir une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (au sens du cours), il faut que le coefficient devant y' soit 1. Si ce n'est pas le cas, on ne rentre pas dans le cadre de la définition.

Cette définition n'est pas la plus générale qui soit. Ce n'est pas la forme la plus générale des équations différentielles linéaires d'ordre 1. Mais si elles n'ont pas cette forme, on ne pourra pas les résoudre. Et on se frotte à des problèmes de définitions des solutions.

Cette forme à l'avantage de permettre, non seulement de résoudre les équations, mais également de simplifier tous les problèmes ultérieurs.

Exemple 1.1 :
L'équation différentielle

$$(x^2+1)y' = 1 - xy$$

n'est pas une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Mais elle se ramène à une équation différentielle linéaire. Cette équation est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$$

qui est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Remarque :
En fait, les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont de classe $\mathcal{C}^1$. On sait déjà qu'elle doivent être dérivable. Mais on a également $y' = -a(x)y + b(x)$. C'est donc une somme de fonctions continue, donc y' est continue. Donc y est de classe $\mathcal{C}^1$.

Par ailleurs, si a et b sont dérivable, y' le sera également. Donc les solutions seront $\mathcal{C}^2$. D'une façon générale, on va pouvoir remonter comme ça par récurrence la "lissitude" des solutions selon celles des coefficients a et b.

C'est un raisonnement assez classique sur les équations différentielles.

On va construire la méthode pour résoudre l'équa diff.

1.2 Principe de résolution

Définition 1.2 (Équation homogène) :
Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues et

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I.

On appelle équation différentielle homogène associée à (E), l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = 0 \tag{E_0}$$

On notera que c'est aussi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 mais sans second membre.

Exemple 1.2 :
L'équation homogène associée à l'équation $y' = xy + 1$ est l'équation $y' - xy = 0$.

Théorème 1.1 (Solutions d'une équa diff à partir de l'équa diff homogène [✓]) :
Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues et
$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$
une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I.

Si f_1 est une solution particulière de l'équation (E), alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme
$$x \mapsto f_1(x) + f_0(x)$$
avec f_0 une solution de l'équation homogène (E_0).

Démonstration :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable. f est solution de (E) si et seulement si
$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) = f_1'(x) + a(x)f_1(x)$$
ce qui équivaut encore à
$$\forall x \in I,\ (f - f_1)'(x) + a(x)(f - f_1)(x) = 0$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si $f - f_1$ est solution de (E_0). □

Remarque :
Le protocole est donc :
- on présente le type d'équa diff à laquelle on a à faire (premier/second ordre, linéaire ou non ...)
- On résout l'équation différentielle homogène
- On détermine une solution particulière
- On en déduit les solutions générales sous la forme $y = y_1 + y_0$

L'étape la plus compliqué est dans l'établissement d'une solution particulière. On a des méthodes pour résoudre l'équation homogène mais peu d'outils pour trouver une solution particulière. Il faut être malin.

Proposition 1.2 (Principe de superposition des solutions [✓]) :
Soit $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ continues et

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) \tag{E}$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I.
Pour $i \in \{1, 2\}$, si f_i est une solution de l'équation

$$y' + a(x)y = b_i(x) \tag{E_i}$$

alors la fonction $f = f_1 + f_2$ est solution de (E)

Démonstration :
Il suffit de faire le calcul. Ça vient de la linéarité de la dérivation. □

Cette proposition permet de simplifier les choses. Pour résoudre une équation, on peut la scinder en plusieurs équations plus simple. Ce qui est intéressant surtout pour trouver une solution particulière.

ATTENTION ! ce n'est PAS une équivalence ! On a pas le sens inverse. Ce n'est pas parce que y est une solution de l'équation de base qu'elle provient forcément d'une somme de solutions des deux petites équations.

Exemple 1.3 :
Par exemple, pour l'équation

$$y' = \sin(x) + \cos(x)$$

on peut considérer les équations

$$y' = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad y' = \cos(x)$$

dont des solutions particulières sont faciles à trouver.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Le principe de superposition n'est qu'une implication ! La réciproque est fausse ! Attention aux raisonnements Shadoks !

Le problème vient du fait qu'il est très difficile de décomposer une solution particulière donnée pour savoir quel bout vient de quelle équation différentielle. On ne peut pas désimplifier pour voir qui vient d'où.

Exemple 1.4 :
Dans l'équation différentielle $y' = \sin(x) + \cos(x)$ précédente, une solution particulière est $x \mapsto \sqrt{2}\cos(x + \pi/4)$. On ne peut évidemment pas dire que c'est une solution de $y' = \sin(x)$ (ou l'autre) et que $x \mapsto 0$ est solution de la seconde. On ne peut pas reconstituer les simplifications pour savoir qui vient d'où.

1.3 Résolution de l'équation homogène

Un des point cruciaux de la résolution d'une équa diff est donc la résolution de l'équation homogène associé. C'est le pont facile. Donc taïaut :

Théorème 1.3 (Solution d'une équation différentielle homogène [✓]) :
Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue et A une primitive de a sur I (*i.e.* A est dérivable sur I et $A' = a$).

Les solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' + a(x)y = 0 \tag{E_0}$$

sont toutes les fonctions définies sur I de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration :
Soit y une fonction définie et dérivable sur I. Alors la fonction $f : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est définie sur I et dérivable. Et

$$\forall x \in I,\ f'(x) = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}$$

Donc y est solution de (E_0) si et seulement si $f' = 0$ si et seulement si f est constante égale à $\lambda \in \mathbb{K}$. Ce qui nous donne le résultat. □

Corollaire 1.4 :
On reprend les même notations que le théorème précédent.

La seule solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ qui s'annule est la fonction constante égale à 0.

Démonstration :
On a $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$. Mais le seule moyen pour que y s'annule est que $\lambda = 0$ et donc $y = 0$. □

On peut extraire du théorème précédent une formule, mais il vaut mieux en extraire une façon de faire qui permet d'éviter de se tromper sur des éventuels erreur de signe :

— On prend l'équation $y' + a(x)y = 0$.

— On exprime y' en fonction de y : $y' = -a(x)y$.

— On cherche une primitive du coefficient de y.

— On exprime y proportionnellement à l'exponentielle de la primitive calculée.

En utilisant des notations à la physicienne et en raisonnant un peu comme eux, on (ne) pourrait (pas) aussi faire :

$$\xcancel{y' = -a(x)y \iff \frac{dy}{dx} = -a(x)y \iff \frac{dy}{y} = -a(x)dx}$$

On met un signe intégral :

$$\xcancel{\int \frac{dy}{y} = \int -a(x)dx \iff \ln(y) = A(x) + C \iff y = e^C e^{A(x)}}$$

C'est moche, mais ça permet de pouvoir retenir les choses. A NE JAMAIS ÉCRIRE !

Exemple 1.5 :
Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

Proposition 1.5 (Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène [✓]) :
Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue et l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

$$y' + a(x)y = 0 \tag{E_0}$$

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

On verra la définition d'espaces vectorielles un peu plus tard, mais ce qu'il faut comprendre pour le moment, c'est que si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0), alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solutions de (E_0). Et les solutions sont toutes proportionnelles entre elles, autrement dit, si y_1 et y_2 sont solutions, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_1 = \lambda y_2$ ou $y_2 = \lambda y_1$.

La démo suivante est donc un peu en avance sur le programme pour le moment. Vous n'avez pas les outils pour pouvoir la comprendre pour le moment. Il va falloir attendre décembre pour cela. On rappellera ce résultat à ce moment là.

Démonstration :
Pour des questions de commodité, on notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

Bien sûr, la fonction constante égale à 0 est dans $\mathcal{S}_0$. Soit $f, g \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\forall x \in I$,

$$(\lambda f + \mu g)'(x) + a(x)(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(f'(x) + a(x)f(x)) + \mu(g'(x) + a(x)g(x)) = 0$$

par linéarité de la dérivation.

Donc $\mathcal{S}_0$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

D'autres part, on sait que toutes les fonctions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$. C'est donc une droite vectorielle. □

1.4 Méthode de la variation de la constante [✓]

Une fois déterminé les solutions de l'équation homogène, il faut encore trouver une solution particulière. C'est le point délicat. Le meilleur moyen est d'avoir du flair (ou que ce soit indiqué dans le sujet). La forme du second membre peut donner des pistes pour trouver une solution particulière. Par exemple, si le second membre est une fonction polynomiale, on peut essayer de trouver une solution polynomiale ; si le second membre est composé de fonctions trigonométriques, on peut essayer de trouver une solution de la même forme ; etc.

Mais il peut arriver (souvent) que le second ne nous aide pas et ne fournit aucune piste pour trouver une solution particulière. On peut alors utiliser ce qu'on appelle "la méthode de la variation de la constante" pour essayer de trouver une solution particulière. Par contre, ça ne marche pas à tous les coups.

L'idée est de reprendre la même démarche que pour la résolution d'une équation homogène qui fonctionne bien et de l'adapter.

— On prend une équation différentielle sur I

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

— On cherche f solution de E sous la forme $f(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ avec λ une fonction dérivable sur I et A une primitive de a sur I.

— En dérivant, on trouve $f'(x) + a(x)f(x) = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)$

— On en déduit $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$

— En déterminant des primitives, on en déduit $\lambda(x)$ et par suite une solution f de E.

— Une fois les calculs effectués (en général sans prendre trop de précaution, un peu comme ce qui est écrit ici), on vérifie que la fonction que l'on obtient (et que l'on sort donc un peu de son chapeau) fonctionne bien en dérivant et en vérifiant que cette fonction satisfait l'équation (E).

ATTENTION ! Cette méthode ne permet d'avoir qu'une solution particulière. Il y a plusieurs étapes qui nécessite de faire des choix, de fixer des constantes pour pouvoir faire les calculs et donc de n'avoir qu'une solution particulière. Et non pas toutes les solutions.

Remarque :
On pourrait être tenté de faire un théorème avec cette méthode. Mais on ne peut pas vraiment. C'est vraiment une méthode. Qui fonctionne ou non selon si l'on sait calculer ou non. Il faut d'abord déterminer une primitive de la fonction a. Une fois que cela est fait, il faut trouver une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, ce qui n'est pas toujours évident (bien sûr, les cas intéressants sont ceux où l'on ne peut pas trouver de primitive ...)

De plus, on a divisé à plusieurs reprises par des fonctions sans vergognes. Si l'on voulait être rigoureux, il faudrait justifier que toutes les fonctions en jeu sont non nuls. Ce qui n'est pas aussi facile qu'il en à l'air. Il peut arriver qu'à plusieurs étapes, on introduise des soucis. Mais ils sont sensé se compenser sur la fin.

Ce qui compte, c'est le résultat final. C'est une méthode un peu louche, qui permet de pouvoir faire apparaître une fonction que l'on vérifie avoir les bonnes propriétés. C'est un tour de magie. Si on essaie d'être plus rigoureux que le simple "Hocus Pocus" physicien, on va se heurter à tout un tas d'embetement difficiles à contourner et qui n'amèneraient pas grand chose.

Exemple 1.6 :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ La méthode de la variation de la constante N'EST PAS UNE FORMULE MAGIQUE ! ! Ce n'est pas une incantation aux dieux mathématiques qui va résoudre tous les problèmes. Cette méthode ne fonctionne pas à tous les coups.

Et des fois, on peut faire mieux, plus rapide, plus efficace que la méthode de la variation de la constante.

Exemple 1.7 :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' - xy = x$$

Exemple 1.8 :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' - 2y = x^2.$$

Remarque :
On ne peut pas toujours résoudre une équation différentielle d'ordre 1. Il faut qu'elle soit suffisamment simple, les coefficients devant être suffisamment bien choisis pour qu'on puisse la résoudre.

Vous verrez l'année prochaine de nouvelles techniques pour pouvoir résoudre des équations différentielles.

1.5 Cas des équations à coefficients constants

C'est le cas le plus simple du cas le plus simple. Il n'y a pas plus de fonctions qui interviennent (autre que l'inconnue). On va pouvoir trouver des primitives sans problèmes. Tout va être facile.

Définition 1.3 (Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant) :
Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur I est une équation de la forme

$$y' + ay = b(x) \tag{E}$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continue.

Proposition 1.6 (Solution d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant) :
Soit $b : I \to \mathbb{K}$ continue, $a \in \mathbb{K}$ et

$$y' + ay = b(x) \tag{E}$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constants.

Alors les solutions de cette équation sont de la forme

$$x \mapsto f_1(x) + \lambda e^{-ax},$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et f_1 une solution particulière.

Démonstration :
On sait que les solutions de (E) sont les solutions de l'équation homogène plus la solution parituclière y_1 que l'on é trouvé. Il suffit donc de déterminer quels sont les solutions de l'équation

$$y' + ay = 0 \tag{E_0}$$

Mais on peut utiliser la résolution d'une équation homogène linéaire d'ordre 1. On connaît une primitive de $x \mapsto a$. □

Exemple 1.9 :
La tension u aux bornes du condensateur d'un circuit RC en régime forcé satisfait l'équation

$$u' + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC}$$

avec $u(0) = 0$.

1.6 Problème de Cauchy

La résolution seule d'une équation différentielle n'est en général pas suffisant. En effet, les équations différentielles proviennent souvent d'une situation concrète (un TP de physique par exemple ...). Et toutes les solutions ne sont pas intéressantes. Il faut les remettre dans le contexte dans lequel l'équation différentielle est apparue. Il y a souvent des conditions initiales que doivent vérifier les solutions. Ce qui du coup réduit le nombre de solution au final. La donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale s'appelle un problème de Cauchy.

Dans un cas d'étude, on a donc en général plutôt un problème de Cauchy qu'une équation différentielle seule. Et il y a des théorèmes qui nous permettent de prédire à l'avance que l'on va trouver une solution à ce problème (donc on ne se fatigue pas pour rien) et nous fournissent aussi l'unicité de cette solution. Ce qui est agréable.

Définition 1.4 (Problème de Cauchy) :
Soit

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I. Pour un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ donné, le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions f de (E) vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Remarque :
La condition initiale $f(x_0) = y_0$ permet de connaître aussi la valeur de $f'(x_0)$ grâce à l'équation différentielle (E). On connaît donc entièrement la fonction f en x_0. Puis la dynamique (au sens physique) va permettre de déterminer le reste de la fonction.

La méthode d'Euler que vous verrez en info permet de trouver une solution approchée à un problème de Cauchy.

Théorème 1.7 (Solution d'un problème de Cauchy à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur l'intervalle I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démonstration :
Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'équation (E). Alors $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I$, $f_1(x) - f_2(x) = \lambda e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur I. Mais $f_1(x_0) = y_0 = f_2(x_0)$. On a donc $\lambda e^{-A(x_0)} = 0$ et donc $\lambda = 0$ ce qui conduit directement à $f_1 = f_2$.

Passons à l'existence. Considérons A la primitive de a qui s'annule en x_0 et B la primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ qui s'annule en x_0.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ la fonction définie par

$$f(x) = (B(x) + y_0)e^{-A(x)}$$

Alors

$$f(x_0) = (B(x_0) + y_0)e^{-A(x_0)} = y_0$$

et f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur I. Et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = (b(x)e^{A(x)} - a(x)B(x) - a(x)y_0)e^{-A(x)} = b(x) - a(x)f(x)$$

autrement dit

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Donc f est solution de l'équation et vérifie la condition initiale. $\square$

En pratique, ce théorème n'est qu'un théorème d'existence. Il affirme que la solution existe, mais il ne fournit pas la solution ni de méthode pour la calculer. Le problème vient de l'expression de B. Son existence est parfaitement juste mathématiquement, mais n'est pas toujours calculable. Par exemple $x \mapsto e^{x^2}$ n'a pas de primitive que l'on peut calculer. On peut écrire $\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt$, ce qui est juste mathématiquement, mais clairement peu utile en pratique.

!!! ATTENTION !!!

Chaque détail du théorème est fondamental. En enlevant une seule des hypothèses, aussi anodine soit-elle, le théorème devient faux.

Par exemple, prenons l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $xy' = y$. Cette équation peut être considérée sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont les $x \mapsto \lambda x$. On voit alors que toutes les solutions passent par l'origine. Il n'y a donc clairement pas unicité au problème de Cauchy $y(0) = 0$. Et de plus, le problème de Cauchy $y(0) = 1$ n'a pas de solutions.

Le problème vient ici de la définition de l'équation différentielle. Pour que ça fonctionne, il faut une équation différentielle qui soit présentée avec un coefficient 1 devant y'. Ce qui fait que l'équation différentielle n'est en réalité par définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Donc les solutions ne sont pas définies en 0. On peut se rendre compte alors que les solutions sont prolongeables en 0 (voir chapitre sur la continuité), mais on sort du cadre du domaine de définition de l'équation différentielle et donc on ne peut pas imposer de condition initiale en 0.

Informations sur les problèmes de Cauchy (HP)

En réalité, une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme

$$\forall t \in I,\ y'(t) = F(t, y(t)) \tag{ED}$$

où l'inconnue est la fonction y définie sur I.

Dans les cas qui vont nous intéresser, F sera un polynôme de degré 1 ou 2 en y et les coefficients, des fonctions continues sympathiques. Mais c'est rarement le cas. Et dans ces autres cas, le problème de Cauchy prend tous sens.

Le problème de Cauchy est un théorème qui nous assure l'existence (et l'unicité) d'une solution à une équation différentielle du type (ED) sur l'intervalle et vérifiant une condition initiale, sous une condition (très restrictive) que doit vérifier la fonction F. Précisément, il faut que F vérifie la condition dite de Lipschitz (on appelle donc parfois le problème de Cauchy-Lipschitz le problème de Cauchy) :

$$\forall t \in I,\ \forall y, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}),\ \exists L > 0,\ \text{t.q.}\ \Big|F(t, y(t)) - F(t, z(t))\Big| \leq L\big|y(t) - z(t)\big|$$

autrement dit, F doit être Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

Cette condition n'est pas vérifiée par toutes les fonctions F. Il faut bien la choisir. Dans les cas qui nous intéressent, F est suffisamment simple pour qu'elle vérifie automatiquement la condition de Lipschitz.

Dans le cas où F ne vérifie pas cette condition, il peut y avoir une infinité de solution. Par exemple, si on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La condition de Lipschitz n'est pas vérifiée au voisinage de 0. La fonction constante nulle est solution mais également toutes les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < C \\ (t - C)^2 & \text{si } t \geq C \end{cases} \end{array}$$

où $C \geq 0$. Le problème de Cauchy ci-dessus a alors une infinité de solutions toutes distinctes.

2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

L'idée générale de la manipulation des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants est le même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1. La différence essentielle étant que, pour cette année, les coefficients doivent tous être constants. Et bien sûr, les solutions de l'équation homogènes seront une peu différentes. Mais on aura aussi le principe de superposition et bien sûr, les solutions de l'équation seront la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Comme pour les équations d'ordre 1.

2.1 Définition

Définition 2.1 (Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) :
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue. L'équation

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

est appelé équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I et d'inconnue y. Une solution de cette équation différentielle est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables vérifiant

$$\forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x)$$

Exemple 2.1 :
l'équation

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

est une telle équation

Seul les équations linéaire à coefficient constants d'ordre 2 sont au programme car ce sont les seules que l'on peut résoudre avec les moyens que l'on a. Le problème ici, est que l'on ne peut plus utiliser la méthode de la variation de la constante. Et que l'on ne sait pas "primitiver", mais que l'on peut seulement dériver.

Donc pour trouver une solution particulière, il faut avoir beaucoup de flair. Il faut trouver une solution sans aide aucune.

2.2 Principe de résolution

Définition 2.2 (Équation différentielle linéaire homogène) :
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue et

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0)$$

s'appelle l'équation différentielle homogène associé à (E). C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.

Remarque :
On notera que si (E) n'est définie que sur l'intervalle I (à cause de c qui n'est définie que sur cet intervalle), l'équation homogène a un sens sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il n'y a plus de restrictions puisque l'on a plus que des constantes comme coefficients. On peut donc considérer l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ même si (E) n'a de sens que sur I.

Théorème 2.1 (Solutions d'une equadiff d'ordre 2 à coefficients constants à partir des solutions de l'équadiff homogène [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et l'équation différentielle linéaire (E) d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = c(x) \tag{E}$$

Soit f_1 une solution particulière de (E) et (E_0) l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E).

Alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions définies et deux fois dérivable sur I de la forme

$$x \mapsto f_1(x) + f_0(x)$$

où f_0 parcourent l'ensemble des solutions de (E_0).

Démonstration :
La démonstration est la même que précédemment. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = f_1''(x) + af_1'(x) + bf_1(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ (f - f_1)''(x) + a(f - f_1)'(x) + b(f - f_1)(x) = 0 \\ &\iff (f - f_1) \text{ solution de } (E_0) \end{aligned}$$

□

Finalement, le principe de résolution de ce genre d'équation différentielle sera le même que pour les équations différentielles linéaire d'ordre 1 :

— On considère une équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c(x) \tag{E}$$

— On présente le type d'équation (linéaire ou non, d'ordre 2 ou non etc)
— On résout l'équation linéaire homogène associée (E_0)
— On trouve une solution particulière f_1
— On en déduit l'ensemble des équation de (E) comme la somme de f_1 avec toutes les solutions de (E_0).

Le point délicat ici sera bien sûr de trouver une solution particulière. On va avoir une technique pour résoudre l'équation homogène, mais l'équation particulière, c'est de la débrouille. Il y a n'a pas de méthode. Il faut en trouver une et c'est tout. On est livré à nous même.

Néanmoins, on peut essayer de décomposer le problème, de le scinder en des plus petits problèmes plus faciles à résoudre. Plus précisément, on peut "découper" la fonction c en une somme de plus petites fonctions qui vont nous permettre de trouver plus facilement le résultat en utilisant le résultat suivant :

Proposition 2.2 (Principe de superposition des solutions [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I. On considère, pour $i \in \{1, 2\}$, les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = c_i(x) \tag{E_i}$$

Si f_i est solution de (E_i) pour $i \in \{1, 2\}$, alors la fonction $f = f_1 + f_2$ est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constants

$$y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x) \tag{E}$$

Démonstration :
Il suffit de dériver $f_1 + f_2$ et de vérifier l'équation (E). □

En particulier, ce principe de superposition permet de "découper" l'équation différentielle afin de simplifier la recherche d'une solution particulière.

Remarque :
Là aussi, le principe de superposition n'est qu'une implication dont la réciproque est fausse. Attention aux Shadoks !

2.3 Résolution de l'équation homogène

Si on a pas de techniques pour trouver une solution particulière, on a en tous cas des méthodes pour s'occuper de l'équation différentielle homogène associé, ce qui nous donne le gros des solutions.

On se placera sur $\mathbb{R}$. Peu importe l'intervalle de définition de l'équation différentielle de départ, une équation homogène a toujours un sens sur $\mathbb{R}$. On va donc se placer dans ce cadre. En repassant à l'équation (E), il faudra donc bien faire attention à restreindre l'ensemble de définition de la solution de l'équation homogène.

2.3.1 Équation caractéristique

Le principe s'apparente fortement au cas de la résolution de suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Définition 2.3 (Équation caractéristique d'une équa diff linéaire d'ordre 2 à coefficient constants) :
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue et

$$y'' + ay' + by = c(x) \tag{E}$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On appelle équation caractéristique de (E) (ou de (E_0) l'équation différentielle homogène associée), l'équation

$$r^2 + ar + b = 0$$

d'inconnue $r \in \mathbb{K}$.

On va devoir donc distinguer deux cas. On sait que les solutions d'une équation du second degré change radicalement selon que l'on se place dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On n'échappe pas à la règle ici et les formes des solutions de (E) vont donc dépendre du corps sur lequel on se place.

Bien sûr, le corps dans lequel on se place, va dépendre du corps auquel appartient les éléments a et b.

2.3.2 Cas complexe

On commence par le cas le plus simple. On sait que dans $\mathbb{C}$, tout se passe toujours bien. C'est pour ça que ce corps a été crée. Pour combler les lacunes de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3 (Solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$ [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0)$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

et de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines α et β distinctes dans $\mathbb{C}$ et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Démonstration :
Soit α, β les solutions de $r^2 + ar + b = 0$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$$

Par produit, z est donc deux fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = (z''(x) + (2\alpha + a)z'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b)z(x))e^{\alpha x}$$

Avec la définition de α et les relations coefficients/racines, on trouve donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = (z''(x) + (\alpha - \beta)z'(x))e^{\alpha x}$$

On en déduit donc que y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$y' + (\alpha - \beta)y = 0$$

<u>Si $\alpha \neq \beta$</u>

Alors z est solution de $z'' + (\alpha - \beta)z' = 0$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \lambda e^{(\beta-\alpha)x}$. Puis en primitivant de nouveau, on trouve donc

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \frac{\lambda}{\beta - \alpha}e^{(\beta-\alpha)x} + \mu$$

Et donc, en multipliant $e^{\alpha x}$, on trouve que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{\lambda}{\beta - \alpha}e^{\beta x} + \mu e^{\alpha x}$$

(ce qui est même un peu plus précis que ce qui est annoncé dans l'énoncé, ce qu'on reverra dans les suites).

Si $\alpha = \beta$

Donc z est solution de l'équation $z'' = 0$, autrement dit $\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \lambda$ et donc $\exists\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z(x) = \lambda x + \mu$. Puis, de nouveau, en multipliant par $e^{\alpha x}$ pour avoir y, on obtient

$$\exists\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}$$

□

Exemple 2.2 :
Résoudre l'équation

$$y'' + (1+i)y' + (1-i)y = 0$$

Proposition 2.4 (Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène [✓]) :

Soit

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E_0}$$

une équation homogène avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de cette équation différentielle est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

En particulier,

$$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0,\ \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0.$$

Démonstration :
On note $\mathcal{S}_0$ les solutions de (E_0). On a soit

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto e^{\beta x})$$

si $\alpha \neq \beta$, soit

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto xe^{\alpha x}, x \mapsto e^{\alpha x})$$

Dans les deux cas, $\mathcal{S}_0$ est une sev de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il suffit donc de montrer que les familles génératrices annoncées sont libres. Ce qui n'est pas dur (exercice). □

2.3.3 Cas réel

Théorème 2.5 (Solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E_0}$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

et de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles simples α, β distinctes et dans ce cas les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$ et dans ce cas les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelles conjugués $\alpha \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$ et dans ce cas, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :
Les deux premiers cas se traitent exactement comme dans le cas complexes. Il reste donc à traiter le cas où $\Delta < 0$. En se ramenant au cas complexe, les solutions sont donc de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{(\alpha + i\omega)x} + \mu e^{(\alpha - i\omega)x} = ((\lambda + \mu)\cos(\omega x) + i(\lambda - \mu)\sin(\omega x))e^{\alpha x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Mais d'autre part, $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y(\pi/(2\omega)) \in \mathbb{R}$ ce qui donne $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda - \mu \in i\mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathfrak{Re}(\lambda) = \mathfrak{Re}(\mu)$ et $\mathfrak{Im}(\lambda) = -\mathfrak{Im}(\mu)$. On pose donc $\gamma = \lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $\delta = i(\lambda - \mu) \in \mathbb{R}$. Alors la fonction est de la forme

$$x \mapsto (\gamma \cos(\omega x) + \delta \sin(\omega x))e^{\alpha x}$$

avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ □

Proposition 2.6 (Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène [✓]) :

Soit
$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_0)$$
avec $a, b \in \mathbb{R}$, une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants réels.

Alors $\mathcal{S}_0$, l'ensemble des solutions de (E_0) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

En particulier,
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0,\ \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0.$$

Démonstration :
On fait comme le cas complexe. Il faut juste étudier le cas supplémentaire. Mais ça se fait pareil. On a déjà exprimé les solutions comme des combinaisons linéaires de deux fonctions ($x \mapsto \cos(\omega x)e^{\alpha x}$ et $x \mapsto \sin(\omega x)e^{\alpha x}$) qui sont linéairement indépendantes. □

Exemple 2.3 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Exemple 2.4 :
Faire de même avec
$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Exemple 2.5 (Chute d'une chaînette) :
L'équation différentielle régissant la chute d'une chaînette de longueur ℓ le long d'une table de hauteur a est régit par l'équation différentielle
$$z'' - \frac{g}{\ell} z = 0$$
où $z(0) = a$ et $z'(0) = 0$. Résoudre cette équation différentielle.

2.4 Problème de Cauchy

Même avec des équations différentielles linéaires d'ordre 2, on a encore unicité de la solution à partir du moment où on impose des conditions initiales.

Théorème 2.7 (Problème de Cauchy [✓]) :
Soit
$$y'' + ay' + by = c(t)$$
une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec $a, b \in \mathbb{C}$ et c une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème est officiellement hors programme.

Démonstration (HP) *:*
Si l'on suppose que le problème de Cauchy admet deux solutions f et g. Alors $h = f - g$ est une solution de l'équation homogène et par linéarité de la dérivation, $h(x_0) = h'(x_0) = 0$. En reprenant les deux cas possible de la forme de h (en se plaçant dans le cas complexe plus générale et selon si le discriminant est nul ou pas), on montre que les deux constantes d'intégration définissant h sont nulles, et par suite, h est nulle. D'où l'unicité.

Pour l'existence, un calcul de vérification suffit. On a la forme générale d'une solution de l'équation différentielle en fonction d'une solution particulière. Il suffit alors de montrer que l'on peut choisir les constantes en résolvant un petit système pour que la solution satisfasse le problème de Cauchy. □

Remarque :
Une double condition initiale sur y ne suffit toutefois pas. En effet, dans le cas où l'on aurait des solutions périodiques (dans le cas où $y'' - y = f(x)$ par exemple), si on impose la valeur de la solution en x_0 et en $x_1 = x_0 + 2\pi$, ce n'est pas assez pour pouvoir déterminer les deux constantes.

On rappelle encore une fois que dans le cadre du cours, les problèmes de Cauchy paraissent triviaux mais qu'ils ne le sont pas en réalités. C'est le cadre du cours qui simplifie un peu trop les choses.

En toute généralité, une équation différentielle d'ordre 2 est une équation de la forme
$$\forall t \in I,\ y''(t) = F(t, y(t), y'(t)).$$
Là encore, dans le cas général, on a pas unicité des solutions à un problème de Cauchy (et il n'y a pas toujours de solutions), sauf dans si F vérifie des certaines conditions particulières (qu'on a

ne détaillera pas ici). Bien sûr, c'est dans ces cas que l'étude des problèmes de Cauchy deviennent intéressants. Dans le cadre du cours, les équations différentielles sont un peu trop simples et l'étude de problème de Cauchy perd un peu son intérêt.

Ici, compte tenu de la forme des équations différentielles linéaires d'ordre 2 qui sont au programme, les problèmes de Cauchy deviennent vraiment banal. Il n'y a même pas de problèmes éventuels de recollement comme il peut y avoir avec l'ordre 1. Mais ce n'est du qu'à la forme spécifique simpliste des équations au programme. Ce n'est pas le cas dans la réalité.

2.5 Obtention d'une solution particulière

Comme dit plus haut, la méthode de variations de la constante ne fonctionne pas dans ce cas là. Et on est assez démuni pour trouver une solution particulière. D'une façon générale, il faut se servir du second membre pour trouver une solution particulière. La première idée à avoir est de chercher une solution du même type que le second membre. Donc si le second membre est un polynôme, on cherche une solution polynomiale ; si le second membre est une fraction rationnelle, on cherche une solution qui est une fraction rationnelle etc.

Mais on a quand même quelques résultats :

Théorème 2.8 (Solution particulière dans le cas d'une exponentielle) :
Soit une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x} \tag{E}$$

avec $a, b, A, \alpha \in \mathbb{K}$. Alors une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique de } (E) \\ Cxe^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est racine simple de l'équation caractéristique de } (E) \\ Cx^2e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est racine double de l'équation caractéristique de } (E) \end{cases}$$

En fait, on a un peu plus précis que ça avec la démo :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\alpha^2+a\alpha+b}e^{\alpha x} & \text{si } \alpha^2 + a\alpha + b \neq 0 \\ \frac{A}{2\alpha+a}xe^{\alpha x} & \text{si } \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \text{ et } 2\alpha + a \neq 0 \\ \frac{A}{2}x^2e^{\alpha x} & \text{si } \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \text{ et } 2\alpha + a = 0 \end{cases}$$

Démonstration :
Supposons que α n'est pas racine de $r^2 + ar + b = 0$.

Considérons $f : x \mapsto Ce^{\alpha x}$ On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = (\alpha^2 + a\alpha + b)Ce^{\alpha x}$$

Mais $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$ par hypothèse et en posant

$$C = \frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$$

la fonction f est solution de (E).

Supposons que α soit racine simple de $r^2 + ar + b = 0$. On considère $f : x \mapsto Cxe^{\alpha x}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = (\alpha^2 + a\alpha + b)Cxe^{\alpha x} + (2\alpha + a)Ce^{\alpha x}$$

Mais par hypothèse, $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$. En posant

$$C = \frac{A}{2\alpha + a}$$

la fonction f est solution de (E).

Supposons que α soit racine double de $r^2 + ar + b = 0$. On considère $f : x \mapsto Cx^2e^{\alpha x}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = (\alpha^2 + a\alpha + b)Cx^2e^{\alpha x} + (2\alpha + a)Cxe^{\alpha x} + 2Ce^{\alpha x}$$

Mais par hypothèse, $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$. En posant

$$C = \frac{A}{2}$$

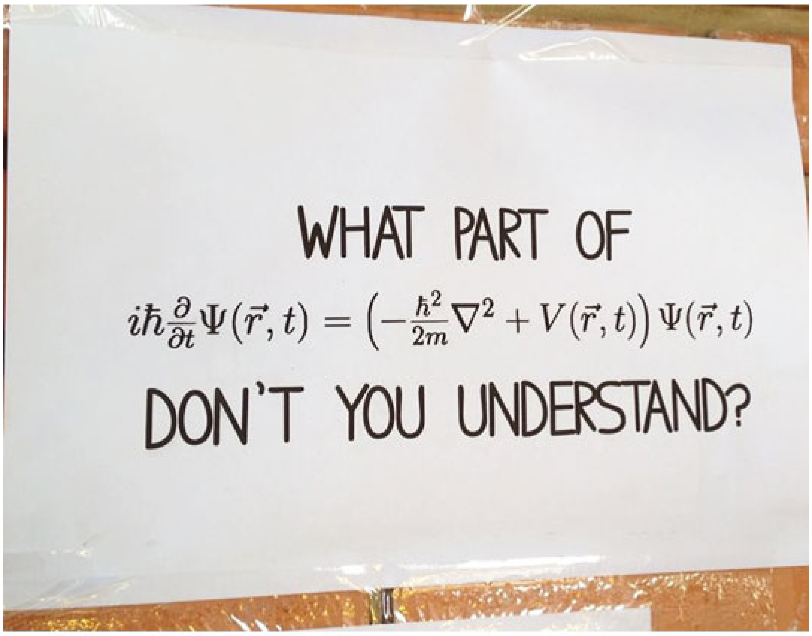
la fonction f est solution de (E). □

Exemple 2.6 :
Résoudre

$$y'' + 3y' + 2y = 3(e^x + e^{-x})$$

Exemple 2.7 :
Déterminer les solutions réelles de

$$y'' + 2y' + 2y = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$$


WHAT PART OF
$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t)\right)\Psi(\vec{r},t)$
DON'T YOU UNDERSTAND?