DM 2
Tournons autour des fonctions circulaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 15 Octobre 2024

Partie 1

On considère la fonction définie par
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}}.$$

1. Étude de f.
   (a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = [0, \pi]$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle I.
   (c) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur I.
   Indic. : on rappelle que $\forall x \in]0, \pi],\ \sin(x) < x$.
   (d) Étudier les variations de f sur I et tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$.

   On considère la fonction g définie sur I par
$$g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right).$$

2. Étude de g.
   (a) Étudier les variations de la fonction
$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{4-5t}{5-4t} \end{array}$$
   (b) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut restreindre son étude à I.
   (c) Montrer que g est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée. Déterminer l'image de g et tracer l'allure du graphe de g.
3. Soit $x \in [0, \pi/3]$.
   (a) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
   (b) Calculer $f(g(x))$. Déterminer aussi $g([0, \pi/3])$. Que peut on en conclure ?

Partie 2

On pose
$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}\right).$$

4. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.
5. Soit $x \in [0, \pi]$. Calculer $\sin(g(x))$.

6. Montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi],\ h(x) = \begin{cases} \pi - g(x) & x \in [0, \arccos(4/5)] \\ g(x) & x \in [\arccos(4/5), \pi] \end{cases}$$

Partie 3

Soit $a \in [0, \pi/2[$. On considère les fonctions h et k définies par

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{2(x-\sin(a))\cos(a)}{x^2 - 2x\sin(a) + 1}\right) \qquad \text{et} \qquad k(x) = \arctan\left(\frac{x - \sin(a)}{\cos(a)}\right).$$

7. Montrer que h et k sont définies sur $\mathbb{R}$.
   Indic. : On pourra introduire la fonction $\varphi(x) = \frac{2(x-\sin(a))\cos(a)}{x^2-2x\sin(a)+1}$ et étudier son image.
8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin(2k(x))$.
9. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} -\pi - 2k(x) & \text{si } x < \sin(a) - \cos(a) \\ 2k(x) & \text{si } \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \sin(a) + \cos(a) \\ \pi - 2k(x) & \text{si } x > \sin(a) + \cos(a) \end{cases}$$