NOM :
Prénom :

Mardi 1 Octobre 2024

Interrogation 3

Ensembles, Application, Relations d'Équivalence

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'inclusion.

Soit E, F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, noté $E \subset F$ si $\forall x \in E,\ x \in F$.

2. Caractérisation de l'injectivité.

Soit E, F deux ensembles non vides, soit $f : E \to F$. Alors f est injective ssi $(\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y)$ ssi $(\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$.

3. Définition de l'image directe et réciproque d'un ensemble.

Soit E, F deux ensembles non vides, $f : E \to F$, $A \subset E$ et $X \subset F$. L'image directe de A par f, noté $f(A)$ est $f(A) = \{f(a),\ a \in A\} = \{y \in F,\ \exists a \in A,\ y = f(a)\}$. Et l'image réciproque de X par f, noté $f^{-1}(X)$, est $f^{-1}(X) = \{x \in E,\ f(x) \in X\}$.

4. Définition d'une relation d'équivalence.

Soit E un ensemble non vide. Soit $\equiv$ une relation binaire sur E. On dit que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur E si $\equiv$ est réflexive $(\forall x \in E,\ x \equiv x)$, symétrique $(\forall x, y \in E,\ x \equiv y \implies y \equiv x)$ et transitive $(\forall x, y, z \in E,\ x \equiv y$ et $y \equiv z \implies x \equiv z)$.

5. Composée de bijections.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6. Caractérisation de la bijectivité.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. f est bijective ssi $\forall y \in F,\ \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$ ssi f est injective et surjective ssi $\exists g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_F$.

7. Définition d'une application.

Soit E, F deux ensembles. Une application f de E dans F est procédé qui associe un élément de F à tout élément de F, *i.e.* $f : E \to F$ est une application bien définie si $\forall x \in E,\ \exists! y \in F$ tel que $y = f(x)$.

8. Définition d'une bijection.

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$. On dit que f est une bijection si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exercice 2 :
Soit E, F, G trois ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$. Soit $h : E \to F \times G$ définie par $\forall x \in E,\ h(x) = (f(x), g(x))$. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective. Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

Supposons f ou g injective. Soit $x, y \in E$ tel que $h(x) = h(y)$. Alors $(f(x), g(x)) = (f(y), g(y))$ par définition de h. Donc, par définition de l'égalité dans un produit cartésien, $f(x) = f(y)$ et $g(x) = g(y)$. Or f ou g est injective. Donc $x = y$. Et donc, par caractérisation de l'injectivité, h est injective.

Supposons h surjective. Soit $y \in F$ et $z \in G$. Alors $(y, z) \in F \times G$. Donc, par surjectivité de h, $\exists x \in E$ tel que $h(x) = (y, z)$. Et donc, par définition de h, $(f(x), g(x)) = (y, z)$. Donc, par définition de l'égalité dans un produit cartésien, $f(x) = y$ et $g(x) = z$. Donc f est surjective et g est surjective.