NOM :

Prénom :

Mardi 08 Octobre 2024

Interrogation 4

Fonctions Usuelles

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Propriétés analytiques de $\arccos$.

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ est continue, bijective, strictement décroissante, dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Propriétés analytiques de $\arcsin$.

$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ est continue, bijective, strictement croissante, impaire, dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Équation fonctionnelle de $\arctan$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \text{sign}(x)\pi/2$.

4. Définition de ch et sh.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

5. Relations fonctionnelles de $\arcsin$.

$\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Relation entre $\arccos$ et $\arcsin$.

$\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$

7. Formule de trigonométrie hyperbolique.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$

8. Relations fonctionnelles de $\arctan$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) = \arcsin(2x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(x) = \arcsin(2x)$. Donc $2x \in [-1,1]$. Donc $x \in [-1/2, 1/2]$.

Puis $2x = \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc $4x^2(1+x^2) = x^2$. donc $x^2(3+x^2) = 0$. Donc $x = 0$.

Inversement, $\arctan(0) = 0 = \arcsin(0)$.

Donc l'équation $\arctan(x) = \arcsin(2x)$ n'a qu'une seule solution réelle qui est $x = 0$.