Chapitre 6 - TD :
Relations d'Ordres

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

8 octobre 2024

1 Relations d'ordres et applications

Exercice 1 :
Soit X un ensemble et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$. On introduit la relation binaire sur E par

$$f \preccurlyeq g \iff \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E
2. Est-ce une relation d'ordre totale ?
3. Comparer les énoncés "f est majorée" et "$\{f\}$ est majoré".

Exercice 2 :
Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ injective. On définit une relation sur E par

$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y)$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 3 :
Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \qquad \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

Exercice 4 :
Montrer que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\max(x, \min(x,y)) = \min(x, \max(x,y)) = x$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq z \implies \max(x, \min(y,z)) \leq \min(z, \max(x,y))$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\min(x, \max(y,z)) \geq \max(\min(x,y), \min(x,z))$

Exercice 5 ([✓]) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $A \neq \emptyset \subset \mathbb{R}$.
Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ aussi et $\max f(A) = f(\max A)$. Qu'en est-il du sup ?

Exercice 6 ([✓]) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Que peut on dire sur f_+ et f_- ? Que dire de $f_+ + f_-$? Et de $f_+ - f_-$? Représenter f_+ et f_- pour $f : x \mapsto x^2 - 1$.

Exercice 7 (Problème des hussards [✓]) :
Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ des réels. Montrer

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(\max_{1\leq j\leq p} a_{i,j}\right) \geq \max_{1\leq j\leq p}\left(\min_{1\leq i\leq n} a_{i,j}\right)$$

et

$$\max_{1\leq i\leq n}\left(\min_{1\leq j\leq p} a_{i,j}\right) \leq \min_{1\leq j\leq p}\left(\max_{1\leq i\leq n} a_{i,j}\right)$$

Application aux hussards : si 200 hussards sont rangés en 10 colonnes et 20 lignes. On sélectionne le plus grand de chaque lignes et on garde le plus petit des plus grand. On sélectionne ensuite le plus petits de chaque colonne et on ne garde que le plus grand des plus petit. Quelle méthode de sélection fournira le plus grand hussard ?

Donner un exemple pour lequel les deux grandeurs considérées sont vraiment distinctes.

2 Borne sup, Borne inf

Exercice 8 :
Soit $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x^2+4x+4}$. Déterminer $\inf f$ et $\sup f$.

Exercice 9 (min, inf et inclusion [✓]) :
Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ bornées et non vides.

1. Si $A \subset B$, montrer que
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$
2. Si A et B vérifient
$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

montrer que
$$\sup A \leq \inf B$$

3. À l'hypothèse de la question précédente, on rajoute
$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \varepsilon$$

Montrer alors que $\sup A = \inf B$.

Exercice 10 :
Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide tel que toute sous partie de E non vide admette un maximum et un minimum. Montrer que E est fini.

Exercice 11 ([✓]) :
Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

En déduire que toute suite d'entiers naturels décroissante est stationnaire.

Exercice 12 (Théorème du point fixe [✓]) :
Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ croissante. On pose $A = \{x \in [a, b], x \leq f(x)\}$.

On appel point fixe de f un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

1. Justifier l'existence de $c = \sup A$ et montrer que $c \in [a, b]$.
2. Montrer que A est stable par f.
3. Montrer que $f(c)$ est un majorant de A.
4. En déduire que $c = \sup(A)$ est un point de fixe de f.
5. Le résultat est-il encore vrai pour $f : [a, b[\to [a, b[$?

Exercice 13 ($\sup \circ \inf$ et $\inf \circ \sup$) :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit les fonctions

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sup\{f(t, y), y \in \mathbb{R}\} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \inf\{f(x, t), x \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Montrer que g et h sont bornées et comparer $\sup h$ et $\inf g$.

3 Partie entière

Exercice 14 ([✓]) :
Montrer :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
3. $\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Exercice 15 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor .$$

Exercice 16 :
Étudier la fonction

$$f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$$

afin de pouvoir tracer son graphe.

Exercice 17 :
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Omega_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[k]{e} - 1} \right\rfloor .$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(1 + 1/k)^k < e < (1 - 1/k)^{-k}$.
2. Calculer alors Ω_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 :
On va montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.
2. On suppose $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor < \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ et on pose $p = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor \in \mathbb{N}$. Montrer alors $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < p \leq \sqrt{4n+2}$.
3. On pose $q = p^2 - 2n - 1$. Donner un encadrement de q^2.

4. En observant les restes possibles du carré d'un entier modulo 4, conclure.

Exercice 19 :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

Exercice 20 :
Calculer,

$$\forall n, m \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$$

Exercice 21 :

1. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit p/q une fraction irréductible avec $q > 0$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 22 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Que dire de la parité de l'entier $\lfloor a + 1/2 \rfloor + \lfloor a - 1/2 \rfloor$?

4 Densité

Exercice 23 :
Soit $F = \{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ et $G = \{\ln(n) - \ln(p),\ n, p \in \mathbb{N}^*\}$.
Montrer que F et G sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24 :
Montrer que

$$\left\{ \frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, 2^n\} \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

5 Exo dur

Exercice 25 (Ensemble sans borne sup dans $\mathbb{Q}$) :
Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}_+^*, x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q}_+^*, x^2 > 2\}$. On va montrer que A n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$ par l'absurde. On suppose donc que A admet une borne sup $\alpha \in \mathbb{Q}$. On pose $\beta = 2/\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\alpha \notin A$.
2. Montrer que β est un minorant de B dans $\mathbb{Q}$ et en déduire une comparaison entre $\inf B$ et β si $\inf B$ existe.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*,\ r \in A \iff \frac{2}{r} \in B$. En déduire alors que β est la borne inf de B.

4. Montrer que $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq b$. En déduire une comparaison de α et β.
5. On pose alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(a) Justifier que $\gamma \in \mathbb{Q}_+^*$.

(b) Montrer que $A \cup B = \mathbb{Q}_+^*$.

(c) En déduire une contradiction.

Exercice 26 (***) :

Soit $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+^*$ tous les deux non vides. On note

$$A : B = \{\frac{a}{b}, a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer que si m est un minorant de A et M un majorant de B, alors $\frac{m}{M}$ est minorant de $A : B$.
2. Montrer que si B n'est pas majorée, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : B,\ x < \varepsilon$$

3. Montrer que si B n'est pas majorée, alors $\inf(A : B) = 0$
4. Montrer que si $A \neq \{0\}$ et $\inf B = 0$, alors $A : B$ n'est pas majorée.
5. On suppose maintenant que A et B sont deux intervalles. Montrer alors que $A : B$ est aussi un intervalle. On pourra faire une distinction de cas sur la position relative des éléments de B.
6. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $A = B =]0, \varepsilon]$. Montrer alors que $A : B = \mathbb{R}_+^*$ en distinguant deux cas.

Exercice 27 (Les intervalles sont connexes) :

On rappelle qu'un intervalle I est ouvert si $\forall x \in I,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$. Plus généralement, on dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est ouverte si

$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A.$$

On veut montrer que les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont connexes, c'est-à-dire que si I est un intervalle ouvert, on ne peut trouver une partition de I en deux parties ouvertes, *i.e.* il n'existe pas de $A, B \subset I$ tels que $I = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ et A et B ouvert.

On va raisonner par l'absurde. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Supposons qu'il existe $A, B \subset \mathbb{R}$ ouverts tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Sans perte de généralité, on peut suppose $a < b$ (quitte à échanger les noms de A et B). On note

$$E_{a,b} = \{t \in [0, 1],\ a + t(b - a) \in A\}.$$

1. Montrer que $E_{a,b}$ admet une borne supérieure, notée $T_{a,b}$.
2. Montrer, en utilisant le fait que A est ouvert, que $a + T_{a,b}(b - a) \notin A$.
3. En déduire, en utilisant le fait que I est un intervalle, que $a + T_{a,b}(b - a) \in B$.
4. En utilisant le fait que B est ouvert, aboutir à une contradiction.
5. Conclure.

Exercice 28 (Théorème d'approximation de Dirichlet (***)) :

Le théorème d'approximation de Dirichlet est un théorème fondamental permettant d'approcher un réel (et de préférence un irrationnel) par une suite de rationnel avec une approximation quadratique. Ce théorème a de nombreuses applications en théorie des nombres. Il est le fondement de la mesure d'irrationnalité d'un nombre réel, qui donne, en quelque sorte, "l'éloignement" d'un réel par rapport aux rationnels.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ 1 \leq q \leq N,\ \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Indic : *Considérer les $\lfloor kx \rfloor$ pour $k \in \{1, \ldots, N+1\}$ et utiliser le principe des tiroirs.*