



Chapitre 7 - TD : Suites

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

5 novembre 2024

1 Généralités

Exercice 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont convergentes vers l et l' respectivement avec $l < l'$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n < v_n$.
2. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + b$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$.
3. Si $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n, v_n \leq 1$ et $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, que peut-on dire pour ces suites ?

Exercice 2 ([✓]) :

Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

1. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (Centrale PC (***) :

Soit $K > 1$, (κ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \kappa_n}{K}$$

1. Montrer que

$$\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{K^{n-n_0}} + \eta \frac{1/K - 1/K^{n-n_0+1}}{1 - 1/K}$$

à l'aide d'une récurrence.

2. En déduire alors que (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 5 :

1. Établir que

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire la limite de (u_n) définie par

$$\forall n \geq 1, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

2 Limites**Exercice 6 (Calcul de limite) :**

Déterminer les limites des suites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ | 2. $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ | 3. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ |
| 4. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$ | 5. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 6. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$ |
| 7. $u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$ | 8. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ | 9. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$ |
| 10. $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ | 11. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$ | |

Exercice 7 :

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^m, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^m$$

Exercice 8 :

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(n! \pi x)^{2m}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que

$$\forall n \geq 4, \forall k \in \{2, \dots, n-2\}, \binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

2. En déduire la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$$

Exercice 10 (Théorème de Césaro) :

1. Démontrer le théorème de Césaro : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente, alors $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de même limite.

2. Montrer que le théorème de Césaro est encore vraie si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente vers $\pm\infty$.
3. La réciproque du théorème de Césaro est-elle vraie ?
4. En déduire le lemme de l'escalier : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
5. Montrer que si $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que (u_{n+1}/u_n) est convergente, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ est convergente et de même limite.
6. Déterminer les limites des suites de terme général :

$$u_n = \binom{2n}{n}^{1/n}, \quad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n}}, \quad w_n = \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n},$$

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Exercice 11 ([✓]) :

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
3. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exercice 12 :

Soit $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$. on considère la suite complexe définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. Exprimer z_n sous forme d'un produit.
2. Déterminer $\lim z_n$.

Exercice 13 :

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe $z_n = x_n + iy_n$ montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leur limites.

Exercice 14 :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 15 :

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments de \mathbb{R} . Donc $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$. On suppose que la suite des segments est emboîtée, i.e. on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. De plus, montrer que si $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\exists! x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$.

3 Suites Arithmético-géométrique

Exercice 16 :

Déterminer les expressions en fonction de n des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - 3u_n$.
2. $z_0 = 1 + i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = (2 - 3i)z_n + 5 + i$
3. $v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)v_n + 1 + \sqrt{2}$

Exercice 17 :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux de (u_n) et (v_n) en fonction de n .

4 Suites récurrentes

Exercice 18 :

Déterminer l'expression des termes généraux des suites suivantes :

1. $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ où $0 < \theta < \pi$.
6. $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}u_n^2}$
7. $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{\sqrt{3}u_n - u_{n+1}}$.

Exercice 19 :

Étudier la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Exercice 20 :

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

Exercice 21 :

Étudier la suite définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$$

Exercice 22 ([✓]) :

Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-6, 6] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 6$.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. Montrer que $(|u_n - 2|)$ converge et en déduire la limite de (u_n) .

5 Suites extraites**Exercice 23 :**

Montrer que les suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas.

Exercice 24 :

Soit (u_n) une suite réelle. Si on suppose que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$, montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 25 :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante telle (u_{2n}) converge.

Montrer que u converge.

Exercice 26 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Montrer que (u_n) n'est pas forcément croissante mais qu'on peut en extraire une sous-suite strictement croissante.

Exercice 27 (Théorème d'approximation de Dirichlet (*) :**

Le théorème d'approximation de Dirichlet est un théorème fondamental en théorie des nombres permettant d'approcher un réel (et de préférence un irrationnel) par une suite de rationnel avec une approximation quadratique. Ce théorème a de nombreuses applications en théorie des nombres. Il est le fondement de la mesure d'irrationalité d'un nombre réel, qui donne, en quelque sorte, "l'éloignement" d'un réel par rapport aux rationnels.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, 1 \leq q \leq N, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Indic : Considérer les $[kx]$ pour $k \in \{1, \dots, N+1\}$ et utiliser le principe des tiroirs.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \exists (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}, \exists (q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, tel que $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

6 Négligeabilité, Dominance, Équivalence

Exercice 28 ([✓]) :

Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\sqrt[n]{n}$ | 2) $(1 + \frac{x}{n})^n, (x \in \mathbb{R})$ | 3) $(\frac{n-1}{n+1})^{n+2}$ |
| 4) $n^2 \left(\cos(1/n) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)$ | 5) $\tan(\pi/4 + \alpha/n)^n$ | 6) $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$ |
| 7) $\left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}{3}\right)^n$ | 8) $(\sin(1/n))^{1/n}$ | 9) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ |
| 10) $\cos(\pi n e^{\frac{1}{2n}})$ | 11) $n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$ | 12) $(1 + \sin(1/n))^n$ |

Exercice 29 :

Déterminer les limites des suites suivantes :

- $n^2 \left((n+1)^{1/n} - n^{1/n} \right)$
- $\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$ où $a, b \geq 0$.
- $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

Exercice 30 ([✓]) :

Trouver un équivalent simple aux suites suivantes :

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| 1) $(n + 3 \ln n)e^{-n-1}$ | 2) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$ | 3) $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$ |
| 4) $\frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$ | 5) $\frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$ | 6) $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ |
| 7) $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 8) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 9) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln n}$ |
| 10) $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ | 11) $n^{+1} \sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n}$ | 12) $\frac{\cos(1/n) - \cos(2/n)}{\ln(1+1/n) - \ln(1+2/n)}$ |
| 13) $\binom{2n}{n}$ | 14) $\sqrt[n]{n!}$ | 15) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$ |

Exercice 31 (** [✓]) :

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

- Soit f une telle fonction. Soit $x_0 > 0$. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu (-3)^n.$$

- (b) Montrer que $\mu = 0$.

2. Conclure.

Exercice 32 :

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin(2^{-n}\theta) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan(2^{-n}\theta)$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 33 :

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 34 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n k!$$

Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n!$

Exercice 35 (MINES MP) :

Donner un développement asymptotique de $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ à 4 termes.

Exercice 36 :

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n .

7 Suites implicites

Exercice 37 :

Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une unique suite positive (u_n) . Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Exercice 38 ([√]) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les équations

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1 \tag{E_n}$$

1. Montrer que (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ et même que $x_n \in [1/2, 1]$.
2. Montrer que (x_n) converge.
3. Déterminer sa limite.

Exercice 39 ([✓]) :

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution dans $I_n =]-\pi/2 + n\pi, n\pi + \pi/2[$.
2. Déterminer un équivalent de x_n
3. Donner un développement asymptotique de 3 termes de x_n .

Exercice 40 (Centrale MP **) :

Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$ notée x_n . Détermine la limite ℓ de x_n , puis un équivalent de $x_n - \ell$.

8 Shampooing (Tout-en-un)**Exercice 41 ([✓]) :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, \sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$
2. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$
3. Calculer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.

Exercice 42 (Constante d'Euler) :

On étudie la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Établir que pour tout $t > -1, \ln(1+t) \leq t$ et en déduire

$$\forall t > 0, \ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}$$

2. Observer que

$$\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et en déduire un équivalent simple de S_n .

3. Montrer que la suite $(u_n) = (S_n - \ln n)$ est convergente. Sa limite est appelé Constante d'Euler et notée γ .

Exercice 43 (Irrationalité de e) :

On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet qu'elles convergent vers e (on pourra le montrer une fois qu'on aura vu les Développement limité et les formules de Taylor-Young, Taylor-Lagrange et les autres). On veut montrer par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$. Donc on suppose que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $a_q < e < b_q$ et en déduire une absurdité.