NOM :

Prénom :

Mardi 15 Octobre 2024

Interrogation 5

Équations Différentielles

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'être solution de cette équation.

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continue. L'équation $y' + a(x)y = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de cette équation différentielle ssi f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue et A une primitive de a sur I. Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

3. Principe de superposition dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Soit $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ continues. Soit f_1 une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + a(x)y = b_1(x)$ et f_2 une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + a(x)y = b_2(x)$. Alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

4. Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. Soit $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$, l'éq caractéristique a deux solutions réelles distinctes α et β, et les solutions de l'eq diff homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, l'éq caractéristique a une unique solution réelle α, et les solutions de l'éq diff homogène sont les $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, l'éq caractéristique a deux solutions complexes non réelles conjuguées $\alpha \pm i\omega$ $(\alpha, \omega \in \mathbb{R})$ et les solutions de l'éq homogène sont les $x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))e^{\alpha x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = e^{x+x^2}$.

L'équation (E) $y' - 2xy = e^{x+x^2}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto e^{x+x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$). Son équation homogène est $y' - 2xy = 0$. Une primitive de $x \mapsto -2x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -x^2$. Donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante : soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto h(x)e^{x^2}$. Alors, par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis :

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de } (E) \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2xf(x) = e^{x+x^2} && \text{déf être sol d'une éq diff} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R},\ h'(x)e^{x^2} + 2xh(x)e^{x^2} - 2xh(x)e^{x^2} = e^{x+x^2} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R},\ h'(x)e^{x^2} = e^{x+x^2} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^x
\end{aligned}$$

On choisit alors $h : x \mapsto e^x$ et donc $f : x \mapsto e^{x+x^2}$ est solution de (E).

D'où, les solutions de E sont les

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + e^x)e^{x^2} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$