DM 2

Tournons autour des fonctions circulaires

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 15 Octobre 2024

Partie 1

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et donc $0 < 1 = 5-4 \leq 5-4\cos(x) \leq 5+4 = 9$. Donc $x \mapsto \sqrt{5-4\cos(x)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   Tout d'abord, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = f(x)$ par 2π-périodicité de $\cos$ et $\sin$. Par périodicité de f, on peut donc réduire son étude à $[-\pi, \pi]$. Mais on a également,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{5-4\cos(-x)}} = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}} = -f(x)$$

   par parité de $\cos$ et imparité de $\sin$. Donc la fonction f est impaire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine, on peut donc réduire sont étude à $[0, \pi]$. On obtient son graphe sur $[-\pi, 0]$ par symétrie. Puis on étend sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

   (b) Soit $x \in [0, \pi]$. D'après le début de la question précédente, $5 - 4\cos(x) \geq 1$. D'où, par croissance de la fonction racine, $\frac{1}{\sqrt{5-4\cos(x)}} \leq 1$.

   De plus, comme $x \in [0, \pi]$, on a $\sin(x) \in [0, 1]$. Et donc, par produit,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}} \leq \sin(x).$$

   (c) On a $f(0) = 0$. Si $x \in]0, \pi]$, alors

$$f(x) \leq \sin(x) < x$$

   Donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, \pi]$. Donc l'unique solution à l'équation $f(x) = x$ dans I est $x = 0$.

   (d) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{5-4\cos(x)}$ est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I (voir question 1a). Par quotient de fonctions dérivable sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, on en déduit que f est dérivable sur I également. Et

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ f'(x) &= \frac{\cos(x)\sqrt{5-4\cos(x)} - 2\frac{\sin(x)^2}{\sqrt{5-4\cos(x)}}}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{\cos(x)(5-4\cos(x)) - 2\sin(x)^2}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \\ &= \frac{5\cos(x) - 2\cos(x)^2 - 2}{(5-4\cos(x))^{3/2}}\end{aligned}$$

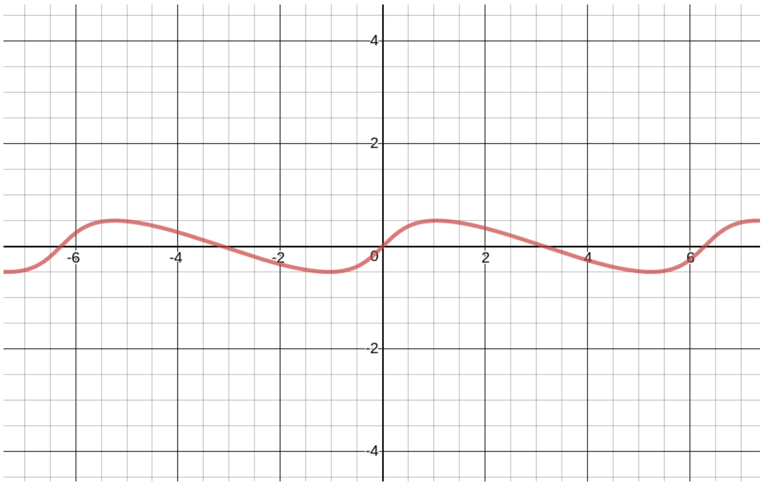
$$= -\frac{2\cos(x)^2 - 5\cos(x) + 2}{(5 - 4\cos(x))^{3/2}}$$

Le numérateur est un polynôme de degré 2 en $\cos(x)$ de discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et de racines 2 et $1/2$. On en déduit donc, par factorisation,

$$\forall x \in I,\ f'(x) = -\frac{(\cos(x) - 2)(2\cos(x) - 1)}{(5 - 4\cos(x))^{3/2}}.$$

On en déduit donc le tableau de variations

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



2. (a) φ est dérivable sur $[-1, 1]$ comme quotient de fonctions qui le sont donc le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\forall t \in [1, 1],\ \varphi'(t) = \frac{-5(5 - 4t) + 4(4 - 5t)}{(5 - 4t)^2} = \frac{-9}{(5 - 4t)^2} < 0$$

Donc φ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$. Et $\varphi(-1) = 1$ et $\varphi(1) = -1$. D'où le tableau de variations

t	-1		$4/5$		1
$\varphi'(t)$			$-$		
φ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

(b) On a $g = \arccos \circ \varphi \circ \cos$. Or $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $\varphi([-1, 1]) = [-1, 1]$. Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$. Par ailleurs, par 2π-périodicité de $\cos$, g est aussi 2π-périodique. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de g à $[-\pi, \pi]$.

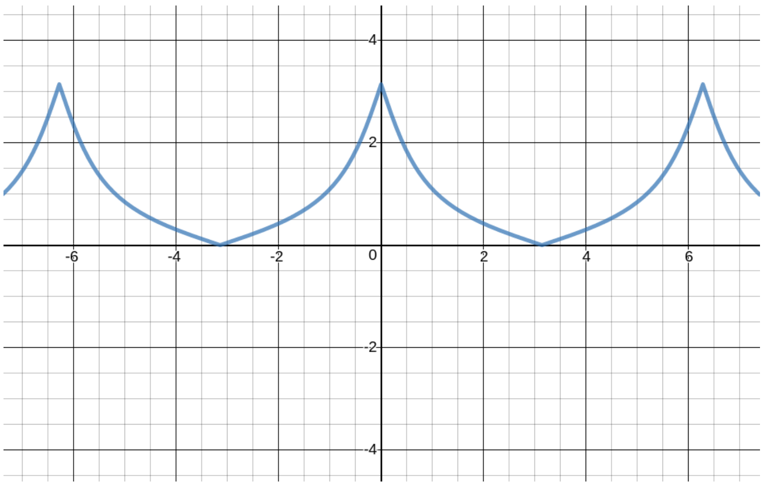
Mais si $x \in \mathbb{R}$, alors $g(-x) = g(x)$ par parité du cosinus. Donc g est paire. On peut donc l'étudier finalement sur $[0, \pi]$. Il suffit de faire ensuite la symétrie de g par rapport à l'ace des ordonnées pour pouvoir avoir g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et la 2π-périodicité termine le travail.

(c) Par composée d'application dérivable, g est dérivable sur $]0,\pi[$ ($\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$). Et

$$\begin{aligned}
\forall x\in]0,\pi[,\ g'(x) &= \frac{-\frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right)^2}}\\
&= \frac{-9\sin(x)(5-4\cos(x))}{(5-4\cos(x))^1\sqrt{(5-4\cos(x))^2-(4-5\cos(x))^2}}\\
&= \frac{-9\sin(x)}{(5-4\cos(x))\sqrt{9-9\cos(x)^2}}\\
&= \frac{-3\sin(x)}{(5-4\cos(x))|\sin(x)|}\\
&= \frac{-3}{5-4\cos(x)}<0 && \text{car } x\in]0,\pi[.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= g(\mathbb{R}) && \text{définition}\\
&= g([0,\pi]) && \text{par périodicité et parité}\\
&= \arccos\left(\varphi(\cos([0,\pi]))\right) && \text{car } g=\arccos\circ\varphi\circ\cos\\
&= \arccos\left(\varphi([-1,1])\right)\\
&= \arccos([-1,1])\\
&= [0,\pi]
\end{aligned}$$



3. Soit $x\in[0,\pi/3]$.

(a) On a

$$\cos(g(x))=\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}$$

et

$$\sin(g(x))=\sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right)^2}=\frac{\sqrt{9-9\cos(x)^2}}{5-4\cos(x)}=\frac{3|\sin(x)|}{5-4\cos(x)}=\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}$$

car $5-4\cos(x)\geq 0$ et $\sin(x)\geq 0$ car $x\in[0,\pi/3]$.

(b) On en déduit

$$f(g(x))=\frac{\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}}{\sqrt{5-4\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\sin(x)\sqrt{5-4\cos(x)}}{(5-4\cos(x))\sqrt{5(5-4\cos(x))-4(4-5\cos(x))}}\\
&= \frac{3\sin(x)}{\sqrt{9(5-4\cos(x))}}\\
&= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned}
g([0,\pi/3]) &= \arccos(\varphi([1/2,1]))\\
&= \arccos([\varphi(1),\varphi(1/2)]) && \text{car } \varphi \text{ décroissante}\\
&= \arccos([-1,1/2])\\
&= \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]
\end{aligned}$$

On en déduit donc que si $x \in [0,\pi/3]$, alors il existe un unique $y \in [\pi/3,\pi]$ tel que $f(x) = f(y)$ et $y = g(x)$ (l'unicité vient de la stricte décroissance de g sur $[0,\pi]$ qui en fait donc une application bijective).

Partie 2

On pose

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}\right).$$

4. On considère l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)} \end{array}$$

Alors ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ par quotient d'applications définies sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (voir étude de φ de la partie 1). Et même, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient d'applications dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'autre part, ψ est 2π-périodique car quotient d'applications 2π-périodique. On étudie donc ψ sur $[-\pi,\pi]$. Et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi'(x) = \frac{3\cos(x)(5-4\cos(x)) - 12\sin(x)^2}{(5-4\cos(x))^2} = \frac{3(5\cos(x)-4)}{(5-4\cos(x))^2}.$$

Soit $x \in [0,\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
\psi'(x) \geq 0 &\iff 5\cos(x) - 4 \geq 0\\
&\iff \cos(x) \geq \frac{4}{5}\\
&\iff \arccos(\cos(x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante}\\
&\iff x \leq \arccos(4/5) && \text{car } x \in [0,\pi] \text{ et } \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Soit $x \in [-\pi,0]$. Alors

$$\begin{aligned}
\psi'(x) \geq 0 &\iff 15\cos(x) - 12 \geq 0\\
&\iff \cos(x) \geq 4/5\\
&\iff \arccos(\cos(x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante}\\
&\iff \arccos(\cos(-x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \cos \text{ pair}\\
&\iff -x \leq \arccos(4/5) && \text{car } -x \in [0,\pi]\\
&\iff x \geq -\arccos(4/5)
\end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations :

x	$-\pi$		$-\arccos(4/5)$		0		$\arccos(4/5)$		π
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
ψ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

D'après le tableau de variation et par 2π-périodicité de ψ, on en déduit donc $\psi(\mathbb{R}) = \psi([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$. Or $\arcsin$ est défini sur $[-1, 1]$. Donc $h = \arcsin \circ \psi$ est défini sur $\mathbb{R}$.

Et par 2π-périodicité de ψ, h est également 2π-periodique. On peut donc l'étudier seulement sur $[-\pi, \pi]$.

5. Soit $x \in [0, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
\sin(g(x)) &= \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{9 - 9\cos(x)^2}}{5 - 4\cos(x)} && \text{car } 5 - 4\cos(x) \geq 0 \text{ cf partie 1} \\
&= \frac{3|\sin(x)|}{5 - 4\cos(x)} \\
&= \frac{3\sin(x)}{5 - 4\cos(x)} && \text{car } x \in [0, \pi] \text{ donc } \sin(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

6. Soit $x \in [0, \pi]$. D'après la question précédente et par définition de $\arcsin$, on a montré

$$\sin(g(x)) = \sin(h(x)).$$

Or $\arcsin(\sin(h(x))) = h(x)$ car $h(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme $g(x) \in [0, \pi]$ par définition de $\arccos$, on a, d'après l'étude des fonctions de la partie 1 :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \arcsin(\sin(g(x))) \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ \arcsin(-\sin(g(x) - \pi)) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ -(g(x) - \pi) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)} \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)} \in [-1, 0] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [-1, 0] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \cos(x) \in [-1, 4/5] \\ \pi - g(x) & \text{si } \cos(x) \in [4/5, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [\arccos(4/5), \pi] \\ \pi - g(x) & \text{si } x \in [0, \arccos(4/5)] \end{cases}
\end{aligned}$$

Partie 3

7. La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction k est également définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$. Donc h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{2(x - \sin(a))\cos(a)}{x^2 - 2x\sin(a) + 1} \in [-1, 1].$$

On va commencer par étudier le dénominateur. C'est un polynôme du second degré de discriminait $\Delta = 4\sin(a)^2 - 4 = -4\cos(a)^2 < 0$. Donc le minimum est atteint en $x = \sin(a)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2\sin(a)x + 1 \geq \sin(a)^2 - 2\sin(a)^2 + 1 = 1 - \sin(a)^2 = \cos(a)^2 > 0.$$

Donc le dénominateur ne s'annule jamais.

On pose $\varphi(x) = \frac{2(x-\sin(a))\cos(a)}{x^2-2x\sin(a)+1}$. φ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) &= 2\cos(a)\frac{x^2 - 2x\sin(a) + 1 - 2(x-\sin(a))^2}{(x^2-2x\sin(a)+1)^2} \\
&= 2\cos(a)\frac{-x^2 + 2x\sin(a) + 1 - 2\sin(a)^2}{(x^2-2x\sin(a)+1)^2} \\
&= -2\cos(a)\frac{x^2 - 2x\sin(a) + 2\sin(a)^2 - 1}{(x^2-2x\sin(a)+1)^2}
\end{aligned}$$

On cherche donc le signe du numérateur qui est une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant $\Delta = 4\sin(a)^2 - 4(2\sin(a)^2 - 1) = -4\sin(a)^2 + 4 = 4\cos(a)^2 > 0$. On obtient donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{2\sin(a) - 2\cos(a)}{2} = \sin(a) - \cos(a) \quad \text{et} \quad x_2 = \sin(a) + \cos(a)$$

On a donc le tableau de variations

x	$-\infty$		$\sin(a)-\cos(a)$		$\sin(a)+\cos(a)$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	
φ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Et le calcul fourni

$$\begin{aligned}
\varphi(\sin(a) - \cos(a)) &= \frac{-2\cos(a)^2}{\sin(a)^2 - 2\sin(a)\cos(a) + \cos(a)^2 - 2\sin(a)^2 + 2\sin(a)\cos(a) + 1} \\
&= \frac{-2\cos(a)^2}{2 - 2\sin(a)^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi(\sin(a) + \cos(a)) &= \frac{2\cos(a)^2}{\sin(a)^2 + 2\sin(a)\cos(a) + \cos(a)^2 - 2\sin(a)^2 - 2\sin(a)\cos(a) + 1} \\
&= \frac{2\cos(a)^2}{2 - 2\sin(a)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\varphi(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Et ainsi, par composition, que h est définie sur $\mathbb{R}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(2k(x)) = 2\sin(k(x))\cos(k(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{\frac{x-\sin(a)}{\cos(a)}}{\sqrt{1+\left(\frac{x-\sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x-\sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}} \\
&= \frac{2(x-\sin(a))}{\cos(a)} \times \frac{\cos(a)^2}{\cos(a)^2+(x-\sin(a))^2} \\
&= \frac{2(x-\sin(a))\cos(a)}{x^2-2x\sin(a)+1} \\
&= \sin(h(x))
\end{aligned}
$$

9. On déduit de la question précédente que $h(x) \equiv 2k(x)[2\pi]$ ou $h(x) \equiv \pi - 2k(x)[2\pi]$. Mais par définition de $\arcsin$, on a $h(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Et par définition de $\arctan$, $k(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $2k(x) \in]-\pi, \pi[$. On aura donc

$$
h(x) = \begin{cases} 2k(x) & \text{si } -\pi/4 \leq k(x) \leq \pi/4 \\ -\pi - 2k(x) & \text{si } -\pi/2 < k(x) < -\pi/4 \\ \pi - 2k(x) & \text{si } \pi/4 < k(x) < \pi/2 \end{cases}
$$

Il reste donc "juste" à déterminer les conditions sur x pour que $k(x)$ soit dans l'un ou l'autre de ces intervalles.

Par bijectivité de la fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et stricte croissance, on a

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{4} \leq k(x) \leq \frac{\pi}{4} &\iff -1 \leq \frac{x-\sin(a)}{\cos(a)} \leq 1 \\
&\iff -\cos(a) \leq x - \sin(a) \leq \cos(a) \\
&\iff \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \cos(a) + \sin(a) \\
&\iff -2\cos(a+\pi/4) \leq x \leq 2\cos(a-\pi/4)
\end{aligned}
$$

Et de même

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} < k(x) < -\frac{\pi}{4} &\iff \frac{x-\sin(a)}{\cos(a)} < -1 \\
&\iff x < \sin(a) - \cos(a)
\end{aligned}
$$

et aussi

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} < k(x) < \frac{\pi}{2} &\iff 1 < \frac{x-\sin(a)}{\cos(a)} \\
&\iff \cos(a) + \sin(a) < x
\end{aligned}
$$

Par conséquent on en déduit

$$
h(x) = \begin{cases} -\pi - 2k(x) & \text{si } x < \sin(a) - \cos(a) \\ 2k(x) & \text{si } \sin(a) - \cos(a) \leq x \leq \sin(a) + \cos(a) \\ \pi - 2k(x) & \text{si } x > \sin(a) + \cos(a) \end{cases}
$$