DM 3

Trois équations différentielles sont sur un bateau ...

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 05 Novembre 2024

Le but de ce problème est d'étudier une équation différentielle non linéaire du premier ordre par une méthode originale : en prouvant que les solutions sont bijectives et que leur réciproques sont elles-même solutions d'une équation différentielle linéaire.

Partie I : Une étude de fonction

On considère dans cette partie la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Montrer que si $g : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors g est bijective de I sur $g(I)$.
3. Étudier les variations de la fonction f et en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un ensemble qu'on déterminera.
4. Donner une expression simple de la réciproque g de f ainsi que le tableau de variation de g.
5. Tracer les courbes de f et de g sur un même graphe (à main levée mais avec tous les éléments (tangentes horizontales ...))

Partie II : Une équation différentielle linéaire

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}} \tag{E}$$

6. Sur quels intervalles va-t-on résoudre (E) ?
7. Déterminer deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$, $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$.
8. En déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E)
9. On va déterminer des solutions particulières de (E).
   (a) Justifier que $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée. Faire de même avec $x \mapsto \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1})$ sur $] - \infty, -1[$.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante. (Attention aux intervalles)
   (c) En déduire les solutions de l'équation complète.
10. Déterminer l'unique solution définie sur $]0, 1[$ et vérifiant $y(1/2) = \pi/4$.

11. Tracer l'allure de cette solution sur $]0,1[$.

Partie III : Une équation non linéaire

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire

$$xy' + 2y(1-y) = 0 \tag{F}$$

qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. Déterminer les fonctions constantes solutions de (F)
13. Pour toute la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation (F) à valeurs dans $]0,1[$. Montrer que ces solutions sont décroissantes.
14. En déduire qu'elles sont bijectives et que leurs réciproques sont solutions d'une équation homogène associée à (E). On rappelle le théorème de dérivabilité d'une réciproque :

> **Théorème 0.1 :**
> Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective et dérivable telle que $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0.$
> Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et $\forall x \in J$,
> $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

15. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \frac{1}{1+(x/k)^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0,1[$) ?
16. Montrer que si on fixe une valeur de x_0 strictement positive et un réel $\alpha \in]0,1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$
17. Donner l'allure de la courbe vérifiant $y(2) = 1/2$