Chapitre 7 - TD :
Suites
Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

23 octobre 2024

1 Généralités

Exercice	Indications
1	1 Utiliser la définition des limites avec des ε 2 Encore des ε 3 Utiliser le théorème des gendarmes
2	Utiliser la définition de la limite en choisissant ε judicieusement puis faire une récurrence.
3	Il faut tout utiliser : $K > 1$ et la définition de la limite avec des ε.
4	Utiliser le fait que c'est une suite d'entiers pour avoir la définition de la divergence vers $+\infty$
5	Passer au log et utiliser le théorème des gendarmes.

2 Limites

Exercice	Indications
6	8 : Écrire la suite avec des produits.
7	Il faut y aller doucement et faire les choses étapes par étapes.
8	C'est le même genre que l'exo 7. Faire disjonction de cas selon si x est rationnel ou non. On montre alors que $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.
9	Faire une récurrence en prenant garde aux minorations. La limite se déduit de la première question avec le théorème des gendarmes. Attention aux bords.
10	C'est un exercice classique. 1 Définition de la limite avec ε appliqué à (u_n) et découper la somme en deux morceaux 2 Idem 3 Faux. Il faut donner un contre-exemple. Une suite simple et bien connue suffit. 4 C'est écrit "en déduire". Il faut donc utiliser Césaro. 5 Utiliser le lemme de l'escalier sur $\ln(u_n)$. 6 Il faut appliquer Césaro, on le lemme de l'escalier ou la question 5, selon les cas.
11	Utiliser la définition de la limite et choisir ε judicieusement pour exploiter la position de ℓ par rapport à 1. On se ramène à des suites géométriques.
12	Euler, notre vieil ami ...
13	(z_n) est géométrique. À partie de là, c'est facile.

14	Pour tout n, u_n est un minorant de $\{k/n+1/k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. On peut donc faire intervenir le plus grand des minorants de cet ensemble, que l'on a des moyen de déterminer. Puis on conclut avec le théorème des gendarmes.
15	Il suffit de traduire les infos qu'on a sur les suites (a_n) et (b_n). Et après, ça va tout seul.

3 Suites Arithmético-géométrique

Exercice	Indications
16	Il faut appliquer la méthode du cours.
17	Il suffit de suivre les questions

4 Suites récurrentes

Exercice	Indications
18	Appliquer le cours. Pour la 6, regarder $\ln(u_n)$ et pour la 7, regarder $\frac{1}{u_n}$.
19	Il faut appliquer la méthode du cours.
20	Idem.
21	Idem. Attention, la fonction est décroissante.
22	Il suffit de suivre les questions. Pour la question 3, il faut utilise l'exo 2.

5 Suites extraites

Exercice	Indications
23	2 méthode. Soit on construit des sous-suites "à la main". Mais c'est compliqué. Soit, on utilise des formules de trigonométrie. Penser à $\cos(a)+\cos(b)$ et $\cos(2c)$.
24	Il faut bien choisir les n et p où on applique la propriété pour pouvoir en déduire des convergences de sous-suites de (u_n).
25	Utiliser le théorème des gendarmes.
26	Il faut commencer par trouver un contre-exemple. Donc une suite non croissante divergente vers $+\infty$. Et ensuite, il faut "juste" bien choisir les termes de la sous-suites pour avoir quelque chose de croissant.
27	1. S'inspirer d'une démo du cours, quelque part. 2. En utilisant la question 1, on peut fabriquer des suites (p_n) et (q_n). Il suffit alors de montrer qu'on a une sous-suite qui a les propriétés désirées.

6 Négligeabilité, Dominance, Équivalence

Exercice	Indications
28	Il faut s'y prendre doucement, en utilisant les relations asymptotiques qu'on a pour le moment.
29	C'est pareil, mais en plus délicat.
30	Il faut "juste" lever les indéterminations. Avec des croissances comparées, par exemples, ou les premiers équivalents de références.
31	La forme recherchée devrait vous faire penser à quelque chose.
32	La trigo, c'est chouette.
33	Utiliser la caractérisation des $\sim$ par les o pour avoir un équivalent de la somme.
34	L'équivalent est donné. Il faut s'en servir. Découper la somme et utiliser la caractérisation des $\sim$ par les o.
35	Même genre que l'exo précédent mais plus précis.
36	Faire un encadrement de $2u_n$ et utiliser les gendarmes pour conclure.

7 Suites implicites

Exercice	Indications
37	Utiliser le théorème de la bijection pour prouver que la suite est bien définie. Puis utiliser la monotonie de la fonction f_n utilisée pour définir les termes de la suite et sa monotonie stricte pour en déduire la monotonie de la suite.
38	Idem. Bijection, puis stricte monotonie d'une bonne suite de fonction.
39	Ici, on peut faire légèrement différemment parce qu'on connaît bien la tangente. Notamment sa périodicité.
40	La méthode est habituelle. Comme au dessus. La difficulté vient surtout de l'étude asymptotique de la suite. Et là, il faut preuve un peu d'initiative sur le choix de la forme de la suite à utilisée.

8 Shampooing (tout-en-un)

Exercice	Indications
41	1 Une récurrence, c'est efficace. 2 Ne pas y aller trop direct. Utiliser la première question sur $\frac{u_{n-1}}{n}$. 3 Il faut factoriser et utiliser les questions précédentes.
42	C'est classique. Ne pas aller trop vite. Pas de soucis majeur, normalement.
43	Ne pas oublier que $q!a_q$ est un entier.