DM 3

Trois équations différentielles sont sur un bateau ...

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 05 Novembre 2024

Partie I : Une étude de fonction

1. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{1-x}{x} \geq 0$. Ce qui est le cas si x et $1-x$ ont le même signe. On fait un tableau de signe très rapide :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $1-x$		$+$	1	$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	0	$+$	1	$+$	
signe de $\frac{1-x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

et donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]0, 1]$.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. On va supposer que g est strictement croissante. Si elle ne l'est pas, on raisonne avec $-g$ qui le sera.

   Par définition de $g(I)$, g est surjective de I sur $g(I)$. Il suffit donc de prouver qu'elle est injective. Soit donc $x, y \in I$ avec $g(x) = g(y)$. Si $x \neq y$, alors soit on a $x < y$, soit $x > y$. On aura donc $g(x) < g(y)$ dans le premier cas, ou bien $g(x) > g(y)$ dans le second cas. Dans les deux cas, on a $g(x) \neq g(y)$ ce qui contredit les hypothèses sur x et y. On a donc une absurdité, et donc $x = y$. Finalement, g est injective et donc bijective de I sur $g(I)$.

3. La fonction f est définie sur $]0, 1]$. Or la racine n'est pas dérivable en 0. Donc, en reprenant le tableau précédent, f est dérivable sur $]0, 1[$. On a alors,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[,\ f'(x) &= \frac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \\ &= \frac{-\sqrt{x}}{x^2\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{x(1-x)}}\end{aligned}$$

   Donc f' est strictement négative sur $]0, 1[$, donc f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et donc sur $]0, 1]$. D'après la question précédente (qui est la preuve du théorème de la bijection de terminale), f établit donc une bijection de $]0, 1]$ sur $f(]0, 1])$.

Comme f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et continue, on en déduit donc que $f(]0,1]) = [f(1), f(0)[= [0,+\infty[$.

Donc f établit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

4. Soit $g = f^{-1}$. Soit $x \in]0,1]$ et $y \geq 0$ tels que $f(x) = y$. On a donc

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff \sqrt{\frac{1-x}{x}} = y \\
&\iff \frac{1-x}{x} = y^2 && \text{car } y \geq 0 \text{ et } x \in]0,1] \\
&\iff x(y^2+1) = 1 \\
&\iff x = \frac{1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

Vérifions notre calcul :

$$f\left(\frac{1}{1+y^2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{1+y^2}}{\frac{1}{1+y^2}}} = \sqrt{y^2} = y$$

puisque $y \geq 0$. Et inversement,

$$\frac{1}{1+f(x)^2} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x$$

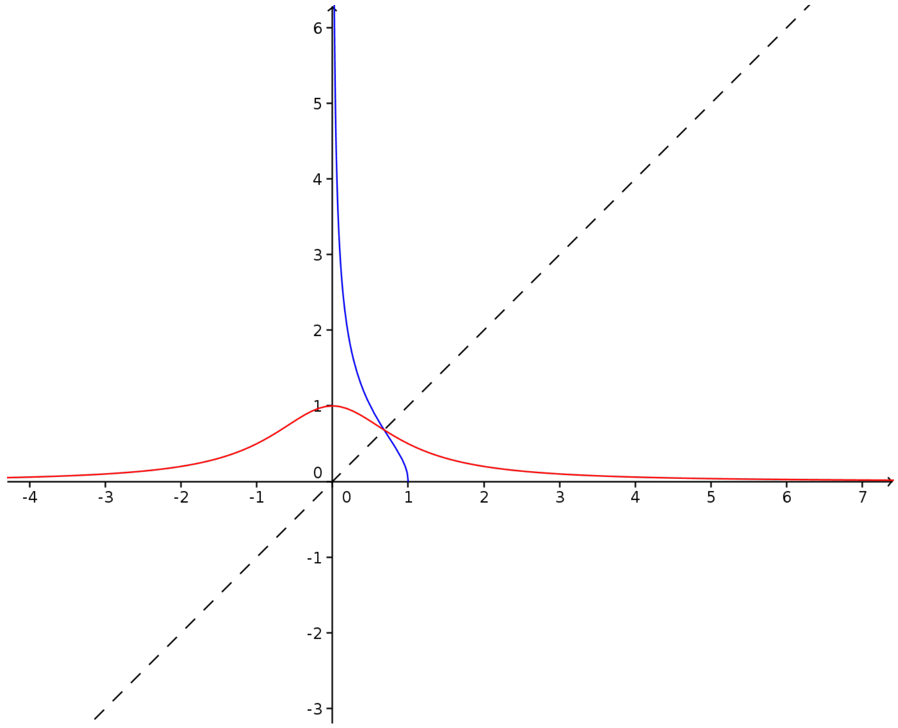
On a donc $\forall y \in \mathbb{R}_+$,

$$g(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

La fonction $y \mapsto y^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $y \mapsto 1+y^2$ est croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. Mais la fonction $y \mapsto 1/y$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$, donc par composition, g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ dans $]0,1]$. On a donc le tableau de variation :

y	0	$+\infty$
g	1 $\searrow$	0

5. on peut donc dessiner l'allure de f (bleue) et g (rouge sur $\mathbb{R}$) :



Partie II : Une équation différentielle linéaire

6. L'équation(E)

$$2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}} \tag{E}$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{1+x} \geq 0$. Mais pour la résoudre, il faut la normaliser, c'est à dire avoir 1 comme coefficient de y'. On a donc

$$\text{(E)} \iff y' + \frac{1}{2x(1-x)}y = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$$

qui est alors définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x(1+x) > 0$ et $x \neq -1, 0, 1$. On fait donc une petite étude de signe rapide

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	
signe de $1+x$		$-$	0	$+$	1	$+$	2	$+$	
signe de $\frac{1}{x(1+x)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	

Donc on étudie (E) sur $]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

7. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \ \frac{1}{2x(1-x)} = \frac{x + (1-x)}{2x(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2x}.$$

Donc on peut prendre $a = 1/2 = b$.

8. L'équation homogène associée à (E) est
$$y' + \frac{1}{2x(1-x)}y = 0 \tag{Eh}$$
qui est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ mais, par cohérence avec l'équation différentielle dont elle provient, que l'on ne va résoudre seulement sur $]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]0,+\infty[$ puisqu'on voudra recoller avec une solution particulière dans la suite.

Commençons par déterminer les solutions sur $I_1 =]-\infty,-1[$ de (Eh). Sut I_1, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}$ est $x \mapsto \frac{\ln(-x)}{2} - \frac{\ln(1-x)}{2}$ car $x<0$ et $1-x>0$. On en déduit que les solutions, sont donc de la forme $y_1(x) = k_1 e^{-\frac{\ln(-x)}{2}+\frac{\ln(1-x)}{2}}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$. Donc l'ensemble des solutions de (Eh) sur I_1 est :
$$\left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty,-1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k_1\sqrt{\frac{x-1}{x}} \end{array},\ k_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sur $I_2 =]0,1[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}$ est $x \mapsto \ln(x)/2 - \ln(1-x)/2$ et donc les solutions sont de la forme $y_2(x) = k_2 e^{-\ln(x)/2+\ln(1-x)/2}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$. Et donc, en simplifiant, l'ensemble des solutions de (Eh) sur I_2 est :
$$\left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k_2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \end{array},\ k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et enfin, sur $I_3 =]1,+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}$ est $x \mapsto \ln(x)/2 - \ln(x-1)/2$. Donc les solutions sont de la forme $y_3(x) = k_3 e^{-\ln(x)/2+\ln(x-1)/2}$ avec $k_3 \in \mathbb{R}$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de (Eh) sur I_3 est
$$\left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k_3\sqrt{\frac{x-1}{x}} \end{array},\ k_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de (Eh) est :
$$\left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} k_1\sqrt{\frac{x-1}{x}} & x<-1 \\ k_2\sqrt{\frac{1-x}{x}} & x \in]0,1[\\ k_3\sqrt{\frac{x-1}{x}} & x>1 \end{cases} \end{array},\ k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. (a) Soit $x \in]1,+\infty[= I_3$. Alors $x^2-1 \geq 0$ dont $\sqrt{x^2-1}$ existe. Comme $x>0$, on a $x+\sqrt{x^2-1}>0$. Donc la fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est bien définie sur I_3. On pose $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ définie sur I_3.

$$\begin{array}{ccc} I_3 & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x+\sqrt{x^2-1} \end{array} \quad \text{dérivable}$$
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y) \end{array} \quad \text{dérivable}$$
$$\begin{array}{ccc} I_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array} \quad \text{dérivable par composition}$$

Donc f est dérivable sur I_3, et
$$\forall x \in I_3,\ f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Soit $x \in]-\infty,-1[= I_1$. De même que précédemment, on a $x^2-1 \geq 0$ et donc $\sqrt{x^2-1}$ existe. Mais comme ici on a $x < -1$, on en déduit donc $x+\sqrt{x^2-1} < x+\sqrt{x^2} = x+|x| = 0$ par croissance de la racine carré. Donc $\forall x \in I_1$, on a donc $-x-\sqrt{x^2-1} > 0$ et donc $x \mapsto \ln(-x-\sqrt{x^2-1})$ est bien définie sur I_1.

On pose alors $g(x) = \ln(-x-\sqrt{x^2-1})$ pour tout $x \in]-\infty,-1[$. Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonction dérivable (comme pour f) et en reprenant le calcul de dérivée précédent, on a

$$\forall x < -1,\ g'(x) = \frac{-1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{-x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(b) On se place d'abord sur I_1 et on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Soit $k_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f_1 : x \mapsto k_1(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}}$. Alors f_1 est dérivable sur I_1 par produit de fonctions dérivable sur I_1. Et

$$\begin{aligned}
\forall x \in I_1,\ f_1'(x) &= k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} + k_1(x)\frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \\
&= k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{k_1(x)}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} \\
&= k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{k_1(x)}{2x\sqrt{x(x-1)}}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& f_1 \text{ solution de (E) sur } I_1 \\
\iff & \forall x \in I_1,\ f_1'(x) + \frac{1}{2x(1-x)}f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \\
\iff & \forall x \in I_1,\ k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{k_1(x)}{2x\sqrt{x(x-1)}} + \frac{k_1(x)}{2x(1-x)}\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \\
\iff & \forall x \in I_1,\ k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} - \frac{k_1(x)}{2x\sqrt{x(x-1)}} - \frac{k_1(x)}{2x\sqrt{x(x-1)}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \\
\iff & \forall x \in I_1,\ k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \\
\iff & \forall x \in I_1,\ k_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

On choisit alors $k_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(-x-\sqrt{x^2-1})$ pour tout $x \in I_1 =]-\infty,-1[$ grâce à la question précédente.

Donc sur $I_1 =]-\infty,-1[$, une solution particulière de (E) est $x \mapsto \frac{\ln(-x-\sqrt{x^2-1})}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

On se place maintenant sur $I_2 =]0,1[$. On utilise là encore la méthode de la variation de la constante. Soit $k_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f_2 : x \mapsto k_2(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Alors f_2 est dérivable sur I_2 par produit de fonctions dérivables sur I_2. Et

$$\begin{aligned}
\forall x \in I_2,\ f_2'(x) &= k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + k_2(x)\frac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \\
&= k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} - k_2(x)\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \\
&= k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{k_2(x)}{2x\sqrt{x(1-x)}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&f_2 \text{ solution de (E) sur } I_2\\
\iff &\forall x \in I_2,\ f_2'(x) + \frac{1}{2x(1-x)} f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_2,\ k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{k_2(x)}{2x\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{2x(1-x)} k_2(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_2,\ k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{k_2(x)}{2x\sqrt{x(1-x)}} + \frac{k_2(x)}{2x\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_2,\ k_2'(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_2,\ k_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Donc une primitive sur $I_2 =]0,1[$ est $k_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Et finalement, une solution particulière de (E) sur $I_2 =]0,1[$ est $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

On se place enfin sur $I_3 =]1,+\infty[$. Soit $k_3 : I_3 \to \mathbb{R}$ dérivable. Soit $f_3 : x \mapsto k_3(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}}$. Alors f_3 est dérivable sur I_3 par produit de fonctions dérivables. Et

$$\forall x \in I_3,\ f_3'(x) = k_1'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{k_1(x)}{2x\sqrt{x(x-1)}}$$

en réutilisant les calculs fait sur I_1, on a

$$\begin{aligned}
&f_3 \text{ solution de (E) sur } I_3\\
\iff &\forall x \in I_3,\ f_3'(x) + \frac{1}{2x(1-x)} f_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_3,\ k_3'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
\iff &\forall x \in I_3,\ k_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

On choisit alors $k_3 : x \mapsto \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}$ en réutilisant la question précédente.

Et donc une solution particulière de (E) sur $I_3 =]1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

(c) En mettant bout à bout les questions 9b et 8 on en déduit que les solutions de l'équation (E) sont :

$$\begin{array}{lll}
\text{sur } I_1, & x \mapsto k_1\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{\ln(-x-\sqrt{x^2-1})}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}, & k_1 \in \mathbb{R}\\
\text{sur } I_2, & x \mapsto k_2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \frac{\arcsin(x)}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}, & k_2 \in \mathbb{R}\\
\text{sur } I_3, & x \mapsto k_3\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}, & k_3 \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Autrement dit, une solution fonction y est solution de (E) si, et seulement si,

$$\exists k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus[-1,0],\ x \neq 1,\ y(x) = \begin{cases} \left(k_1 + \frac{\ln(-x-\sqrt{x^2-1})}{2}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x}} & \text{pour } x < -1\\ \left(k_2 + \frac{\arcsin(x)}{2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}} & \text{pour } x \in]0,1[\\ \left(k_3 + \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x}} & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

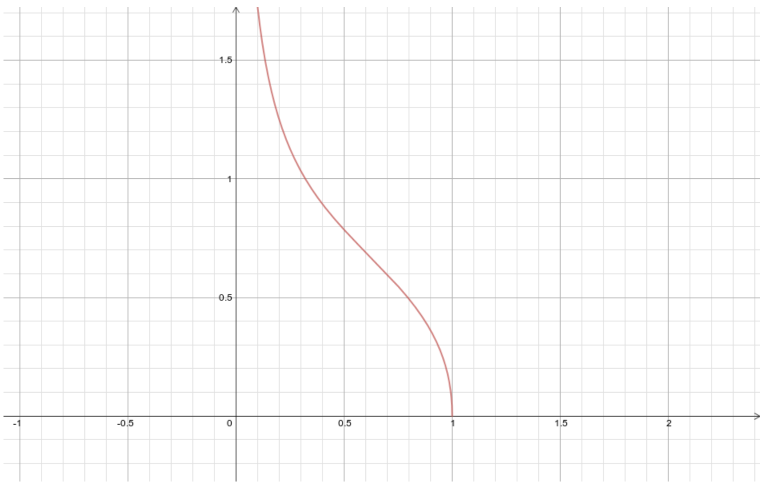
10. On cherche la solution y au problème de Cauchy (qui est donc unique) à (E) sur $]0,1[$ vérifiant $y(1/2) = \pi/4$.

Comme y est solution de (E) sur $]0,1[$, on sait donc qu'il existe $k_2 \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,1[$, $y(x) = k_2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \frac{\arcsin(x)}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Ce qui nous donne $y(1/2) = k_2 + \frac{\pi/6}{2}$ d'où $k_2 = \pi/4 - \pi/12 = \pi/6$.

Donc la solution à (E) sur $]0,1[$ vérifiant $y(1/2) = \pi/4$ est

$$y(x) = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arcsin(x)}{2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

11. L'allure de cette fonction est donc



Partie III : Une équation non linéaire

12. On considère l'équation

$$xy' + 2y(1-y) = 0 \tag{F}$$

Soit y une solution constante de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $y(x) = k$. y est dérivable (bien sûr) et $\forall x > 0$, $y'(x) = 0$. Comme y est solution de (F), on a donc, $\forall x > 0$, $2k(1-k) = 0$, et donc $k = 0$ ou $k = 1$. Les seules solutions de (F) constantes sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1.

13. Soit y une solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on suppose à valeurs dans $]0,1[$. Autrement dit, $\forall x > 0$, $y(x) \in]0,1[$. On a donc,

$$\forall x \in]0,1[,\ y'(x) = \frac{2y(x)(y(x)-1)}{x}$$

Mais $\forall x \in]0,1[$, on a $y(x) > 0$ et $y(x) - 1 < 0$ et $x > 0$. Donc $\forall x > 0$, $y'(x) < 0$. Donc y est strictement décroissante.

14. Par théorème de la bijection, une solution de (F) à valeurs dans $]0,1[$ est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image. On appelle z la bijection réciproque de y. On a donc $z : y(\mathbb{R}_+^*) \to \mathbb{R}_+^*$. Comme y' ne s'annule pas ($\forall x > 0$, $y'(x) < 0$), z est dérivable et

$$\forall x \in y(]0,1[),\ z'(x) = \frac{1}{y'(z(x))} = \frac{z(x)}{2y(z(x))(y(z(x))-1)} = \frac{z(x)}{2x(x-1)}$$

Donc z est solution de l'équation différentielle linéaire

$$y' - \frac{1}{2x(x-1)}y = 0$$

qui est l'équation différentielle homogène (Eh) associée à (E).

15. Les solutions de (Eh) sur $]0,1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto k_2\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$, d'après la question 8.

Soit y une solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $]0,1[$. On a vu que y est bijective dans la question précédente. Alors (cf question précédente) y^{-1} est une solution de l'équation homogène de (E) sur $]0,1[$. Donc

$\exists k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,1[$, $y^{-1}(x) = k\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Mais y^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (car y est définie sur $\mathbb{R}_+^*$), donc $k > 0$.

Soit maintenant $x > 0$ et $z \in]0,1[$ tels que $y(x) = z$. Donc $x = y^{-1}(z) = k\sqrt{\frac{1-z}{z}}$. On en déduit donc

$$\begin{aligned}
&x^2 = \frac{k^2(1-z)}{z} \\
\iff &zx^2 = k^2(1-z) \\
\iff &z(x^2+k^2) = k^2 \\
\iff &z = \frac{k^2}{x^2+k^2} \\
\iff &z = y(x) = \frac{1}{1+(x/k)^2}
\end{aligned}$$

puisque $k > 0$.

Finalement, pour tout $k > 0$ et tout $x > 0$, on a $(x/k)^2 > 0$ ce qui nous amène à $1 + (x/k)^2 > 1$ et donc $y(x) = \frac{1}{1+(x/k)^2} \in]0,1[$. Donc toutes les valeurs de $k \in \mathbb{R}_+^*$ fonctionnent.

16. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $x_0 > 0$. On va montrer d'abord l'existence d'une solution y de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(x_0) = \alpha$. Et dans un second temps on montrera l'unicité.

    Soit y une solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall x > 0$, $y(x) = \frac{1}{1+(x/k)^2}$. Alors en particulier, on doit avoir

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = \alpha \\
\iff &\frac{1}{1+(x_0/k)^2} = \alpha \\
\iff &1 + (x_0/k)^2 = \frac{1}{\alpha} \\
\iff &k^{-2} = \frac{1-\alpha}{\alpha x_0^2} && \text{car } x_0 > 0 \\
\iff &k^2 = \frac{\alpha x_0^2}{1-\alpha} && \text{car } \alpha \in]0,1[\\
\iff &k = x_0\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} && \text{car } k > 0,\ x_0 > 0,\ \alpha > 0,\ 1-\alpha > 0
\end{aligned}$$

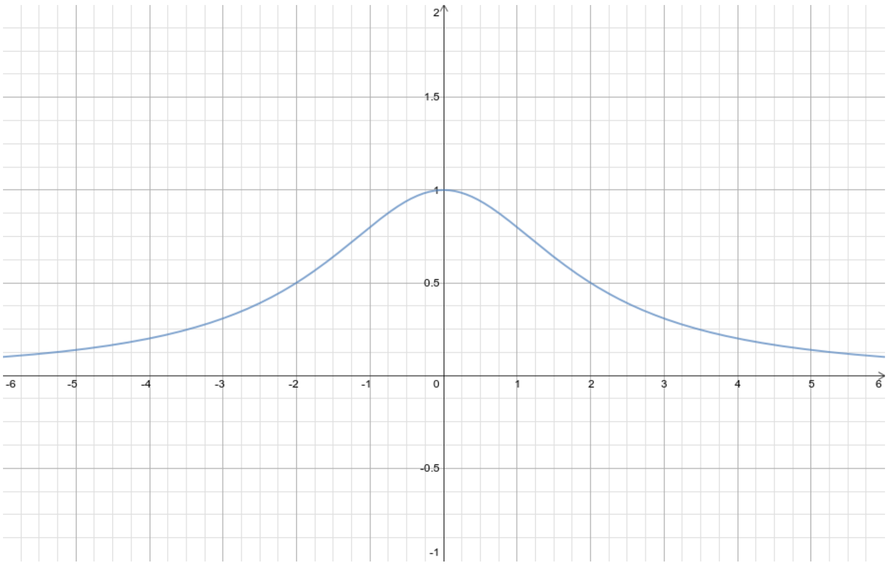
    (observons au passage que cela nous fournit également l'unicité)

    Passons a l'unicité. Supposons donc qu'il existe une autre solutions z de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $z(x_0) = \alpha$. Donc il existe $\lambda > 0$ telle que $\forall x > 0$, $z(x) = \frac{1}{1+(x/\lambda)^2}$. On doit donc avoir en particulier

$$y(x_0) = \alpha = z(x_0) \iff 1 + (x/k)^2 = 1 + (x/\lambda)^2 \iff k^2 = \lambda^2 \iff k = \lambda$$

    puisque $k, \lambda > 0$. D'où l'unicité.

17. Enfin, en appliquant à $x_0 = 2$ et $\alpha = 1/2$, on obtient une constante $k = 2\sqrt{\frac{1/2}{1-1/2}} = 2$ et donc $y : x \mapsto \frac{1}{1+(x/2)^2} = \frac{4}{4+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dont l'allure est



Il est possible de jouer avec toutes les fonctions en présence en cliquant ici. On peut tout faire apparaître et faire bouger les constantes qui apparaissent pour voir les conséquences sur les solutions.

Au passage, on observe que pour les solutions générales, il y a des problèmes de recollement $\mathcal{C}^1$ qui peuvent se poser (et devraient être posé). Mais on ne pourra régler ces questions qu'à partir du chapitre sur la dérivabilité. Pas avant. Quoi qu'il en soit, vous pouvez voir d'ores et déjà que tous les choix des constantes k_2 et k_3 ne permettent pas d'avoir une fonction lisse en 1. Il faut bien les choisir. Par exemple, avec $k_2 = k_3 = 3$ par exemple, on a un point d'inflexion en 1. La fonction n'est pas lisse en ce point. Par contre, pour $k_2 = 10 = -k_3$, il semble que la fonction soit lisse en ce point. Il faudrait étudier ce genre de comportement et comment bien choisir k_2 et k_3 pour avoir une fonction lisse.