NOM :
Prénom :

Mardi 05 Novembre 2024

Lycée Loges

Interrogation 7

Relations d'Ordre

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une relation d'ordre totale.

Soit E un ensemble (non vide) et $\preccurlyeq$ une relation binaire sur E. $\preccurlyeq$ est dit une relation d'ordre totale si $\preccurlyeq$ est réflexive ($\forall x \in E,\ x \preccurlyeq x$), antisymétrique ($\forall x, y \in E,\ (x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \implies x = y)$), transitive ($\forall x, y, z \in E,\ x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z \implies x \preccurlyeq z$) et deux éléments quelconque de E sont comparables ($\forall x, y \in E,\ x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$).

2. Définition d'un majorant.

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. Soit $A \subset E$. Soit $M \in E$. M est un majorant de A si $\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M$.

3. Définition de la borne inf.

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $A \subset E$ et $\alpha \in E$. Alors α est une borne inf de A si α est un minorant de A et si $\forall m \in E$, m minorant de $A \implies m \preccurlyeq \alpha$.

4. Définition de la partie entière.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$ est définie par $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$.

5. Propriété de la borne inf de $\mathbb{R}$.

Tout sous-ensemble non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (dans $\mathbb{R}$).

6. Propriétés de la partie entière.

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$; $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$; et $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{Z} \iff x = \lfloor x \rfloor$.

7. Définition de la densité dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dit "dense dans $\mathbb{R}$" si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists a \in A$ tel que $x < a < y$. Ou encore, si $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

8. Caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sup A$ existe et $\alpha = \sup A \iff \alpha$ majorant de A et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$, $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.

Exercice 2 :
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide admettant un minimum. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante. Montrer que $\min f(A)$ existe et que $\min f(A) = f(\min A)$.

Par définition du min (qui est un minorant), $\forall a \in A,\ a \geq \min A$. Et donc, par croissance de f, $\forall a \in A,\ f(a) \geq f(\min A)$. Donc $f(A)$ est minorée (par définition de $f(A)$) par $f(\min A)$. De plus, $\min A \in A$ par définition du min, donc $f(\min A) \in f(A)$.

Donc $f(\min A)$ est un majorant de $f(A)$ dans $f(A)$. Donc par définition, $\min f(A)$ existe et par unicité du minimum, $f(\min A) = \min f(A)$.