NOM :
Prénom :

Mardi 12 Novembre 2024

Lycée Loges

Interrogation 7

Suites 1

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de suites adjacentes.
Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (u_n) et (v_n) sont monotones de monotonie contraire.

2. Définition d'une suite convergente.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) converge si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

3. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Toute suite bornée admet au moins une sous-suite convergente.

4. Théorème de la limite monotone (un seul cas).
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) est minorée. Et dans ce cas (u_n) converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$. De plus, si (u_n) n'est pas minorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

1. Borne suite à partir d'une borne d'une limite.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < \ell$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $a < u_n$.

2. Variation d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f : D \to D$ telle que $u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0$. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

3. Limite potentielle d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f : D \to D$ continue telle que $u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $f(\ell) = \ell$.

4. Passage à la limite dans les inégalités.
Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell \leq \ell'$.

Exercice 2 :
Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - (p+1)u_{n+1} + \frac{2p+1}{4}u_n = 0$. Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

(u_n) est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels d'équation caractéristique $r^2 - (p+1)r + \frac{2p+1}{4} = 0$. $\Delta = (p+1)^2 - 2p - 1 = p^2 \geq 0$. Les racines de l'équation caractéristiques sont donc $r_1 = \frac{p+1-p}{2} = 1/2$ et $r_2 = \frac{p+1+p}{2} = p + 1/2$ (car $p \geq 0$). Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \mu(p+1/2)^n$.

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc $\lambda + \mu = 0$ et $1 = \frac{\lambda}{2} + \mu(p+1/2) = p\mu$. Donc $\mu = \frac{1}{p}$ et $\lambda = -1/p$.

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2^n} + (p+1/2)^n\right).$$