Chapitre 9 - TD :
Espaces vectoriels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

19 novembre 2024

1 Espaces Vectoriels

Exercice 1 :
On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois suivantes :

$$\forall (x,y),(z,t)\in\mathbb{R}^2,\ \ (x,y)\star(z,t)=(x+z+1,y+t+1)$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ \lambda@(x,y)=(\lambda x-(1-\lambda),\lambda y-(1-\lambda))$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2,\star,@)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

2 Sous-ev

Exercice 2 :
Les parties suivantes sont-elles des sev de $\mathbb{R}^2$?

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\leq y\} \qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy=0\}$$
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=y\} \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y=1\}$$
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2-y^2=0\} \qquad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=0\}$$

Exercice 3 :
Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$A=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ dérivable},\ \ f'(a)=f'(b)\} \qquad B=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continue},\ \ \int_a^b f=0\}$$
$$C=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ bornée}\} \qquad D=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ arithmétique}\}$$
$$E=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ monotone}\} \qquad F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=0\}$$
$$G=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=nu_{n+1}+u_n\}$$

Exercice 4 :
On considère les vecteurs

$$u=(1,1,1),\ \ v=(1,0,-1)\in\mathbb{R}^3$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v)=\{(2a,a+b,2b),a,b\in\mathbb{R}\}$ et donner des $\mathrm{Vect}(u,v)$ en compréhension (donc donner des équations que doivent vérifier les coordonnées des vecteurs de $\mathrm{Vect}(u,v)$).

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$x = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad y = (0, 1, a),\ a \in \mathbb{R}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2) \in \mathrm{Vect}(x, y)$. Comparer alors $\mathrm{Vect}(x, y)$, $\mathrm{Vect}(x, u)$ et $\mathrm{Vect}(y, u)$, puis donner des équations de ces espaces.

3 Opérations sur les sev

Exercice 6 :
Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a - b, a + b, a - 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 7 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E. Montrer

$$F \cap G = F + G \iff F = G$$

Exercice 8 (CNS de structure d'ev pour une réunion [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 9 :
Soit F, G, H trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Montrer

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

Exercice 10 :
Soit

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 :
Soit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E, f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 12 :
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 13 :
Soit F, G, F', G' des sev d'une $\mathbb{K}$-ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.
Montrer
$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

Exercice 14 :
On pose $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et on considère les sous-espaces
$$F_1 = \{f \in E, f \text{ constante}\} \qquad F_2 = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$$
$$F_3 = \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\}$$
Montrer
$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

Exercice 15 :
Soit F, F', G, G' des sev de E un $\mathbb{K}$-ev tels que
$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \quad \text{et} \quad F' \subset G$$
Montrer
$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

Exercice 16 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_n$ des sev de E tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i \subset F_i$ et
$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$
Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i = F_i$.

4 Familles libres, Familles génératrices

Exercice 17 :
Étudier l'indépendance linéaire des familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes. Pour les familles liées, donner une combinaison linéaire non triviale nulle. Donner des équations des espaces engendrés par ces familles de vecteurs.

1. $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 2, 2)$
2. $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$, $x_3 = (1, -1, -2)$
3. $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$, $x_3 = (-1, 1, -1)$.
4. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (1, -1, 0)$, $x_3 = (1, 0, 2)$, $x_4 = (2, 1, 0)$.
5. $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (2, 0, 1)$, $x_3 = (0, 1, 1)$.

Exercice 18 :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $x_1 = (1, a, b)$, $x_2 = (b, 1, a)$ et $x_3 = (a, b, 1)$.
Étudier l'indépendance linéaire de x_1, x_2 et x_3 en fonction des paramètres a et b.

Exercice 19 ([✓]) :
Montrer que la famille suivantes est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$f_1 : x \mapsto \cos(x),\ f_2 : x \mapsto x\cos(x),\ f_3 : x \mapsto \sin(x),\ f_4 : x \mapsto x\sin(x)$$

Exercice 20 ([✓]) :
$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 21 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x, y, z \in E$ trois vecteurs linéairement indépendants de E. On pose

$$u = y + z, \quad v = z + x, \quad w = x + y$$

Montrer que (u, v, w) est encore une famille libre de E.

Exercice 22 ([✓]) :
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-ev E. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On pose

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

et

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ y_i = x_i + u$$

A quelle condition sur les α_i, la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est-elle libre ?

Exercice 23 :
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E un $\mathbb{K}$-ev.
Montrer que $\forall a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \ldots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 24 (**) :
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante de tous les nombres premiers (donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ etc)
Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriels et que $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$-ev.

Exercice 25 :
Trouver des familles génératrices des sev suivants

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = t - z = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = x - z = x - t = 0\}$$

$$D = \{(x, y, z, t, u, v) \in \mathbb{R}^6, z - 2x - y + 3t + u - v = 0\}$$

Exercice 26 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Soit G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on pose

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_p + a)$$

1. Montrer que $\forall a \in G$, $F_a \oplus G = E$
2. Soit $a, b \in G$. Montrer que

$$a \neq b \implies F_a \neq F_b$$